I. ВВЕДЕНИЕ

Предыдущий редактор этого журнала *, профессор Роналд Пайк, любезно предложил мне написать воспоминания, связанные с моей деятельностью на протяжении периода, охватывающего половину столетия — с 1920 по 1970 годы, когда я активно работал в области математической теории вероятностей. Реализуя это предложение, я не имел в виду писать историю теории вероятностей. Я остановлюсь лишь на собственных впечатлениях о выполненных работах и о некоторых из тех, кто их выполнял и в основном лишь на тех задачах, которые были интересны мне лично, в то время как многие другие направления исследования, с общих позиций, возможно, даже более интересные, будут едва упомянуты.

В связи со столь субъективным характером этой статьи, вероятно, удобнее начать с кратких сведений о себе и о причинах моего интереса к теории вероятностей.

Я родился 25 сентября 1893 года в Стокгольме и был вторым сыном у моих родителей, состоявших в двоюродном родстве. И хотя наши предки в течение нескольких веков проживали на острове Готланд, в старинном городке Висбю, мои родители жили в Стокгольме. Отец был банкиром.

Когда я приступил в 1912 году к занятиям в Стокгольмском университете, меня в равной степени (почти) интересовали химия и математика. Моя первая должность в университете — ассистент-исследователь — была связана с работой в области биохимии, продолжавшейся в течение года, непосредственно перед началом первой мировой войны, и моя первая научная публикация также относится к этой области. Вскоре, однако, я пришел к заключению, что мое настоящее дело — это математика. Мне повезло, что

---

* «The Annals of Probability», 1976, vol. 4, No 4, 509—546.

у меня был такой учитель математики и друг, как Марсел Рис, — молодой венгр, приехавший работать в Институт Миттаг — Леффлера и оставшийся затем в Швеции; позже он стал профессором Лундского университета. Благодаря ему я получил образование, соответствовавшее тогдашним «стандартам» математики, и вошел в круг проблем, связанных с мерой Лебега и теорией интегрирования.

Мои собственные исследования были посвящены аналитической теории чисел; занимаясь ими, я познакомился с интегралами типа интегралов Фурье, которые очень схожи с теми, что встретились мне позже при изучении связей между распределением вероятностей и его характеристической функцией. В 1917 году я получил степень доктора философии за диссертацию, посвященную ряду Дирихле, — одному из основных аналитических инструментов теории простых чисел.

Для молодого шведского математика моего поколения, искавшего работу, которая позволила бы ему обеспечить свою семью, было вполне естественным обратиться к страховому делу. Шведские страховые компании традиционно использовали в качестве актуариев * высококвалифицированных математиков, и несколько моих университетских друзей получили такую работу. Начав в 1918 году работу в этой сфере, я к 1920 году получил должность актуария в компании, специализировавшейся в области страхования жизни.

Именно обязанности актуария столкнули меня с вероятностными задачами и дали моим математическим интересам новое направление. В 1918 году я начал знакомиться с доступной мне литературой по теории вероятностей и занялся решением отдельных задач, связанных с математическими аспектами определения страхового риска. Эти задачи, хотя и имели весьма специфический характер, были очень тесно связаны с теми разделами теории вероятностей, которые впоследствии заняли в ней центральное место, поэтому несколько вводных замечаний о них я сделаю прямо сейчас.

В качестве результата деятельности страховой компании за период, скажем, одного года можно рассматривать сумму результатов операций по всем страховым делам. Ес-

---

* Актуарий (страх.) — специалист в области математики и статистики страхового дела. Он занимается определением страхового риска, ставок страховых премий, страховых взносов и т. п. — Примеч. пер.

ли допустить, что последние статистически независимы, то становится вполне очевидной связь этой задачи с классической «центральной предельной теоремой» теории вероятностей. Можно, однако, всё страховое дело рассматривать как экономическую систему, развивающуюся (изменяющуюся) во времени и подвергающуюся во все моменты времени случайным возмущениям. Системы такого рода изучались в некоторых ранних работах, которые теперь рассматриваются в качестве предшественников современной теории случайных процессов.

Обе эти задачи заинтересовали меня уже на этой ранней стадии. В следующем разделе я попытаюсь дать краткий набросок положения, существовавшего в теории вероятностей до 1920 года, и остановлюсь на истории некоторых конкретных задач.

II. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДО 1920 ГОДА

1. Общие замечания, основания. Перед глазами молодого человека, получившего образование в области чистой математики и воспитанного согласно существовавшим в начале нашего столетия стандартам математической строгости, представала довольно противоречивая картина. Существовал большой классический курс теории вероятностей, написанный Лапласом и впервые опубликованный в 1812 году. Его было интересно и полезно читать, но, с точки зрения «современного» математика, он был совершенно не строг и, кроме того, на удивление некритическим в том, что касалось оснований и приложений теории. Кстати, быть может, интересно вспомнить, что император Наполеон, при котором Лаплас был министром и сенатором, позже неодобрительно о нем отозвался, заметив, что Лаплас внес в практическую административную деятельность «l'esprit des infiniments petits»*.

Французские последователи Лапласа, даже математики столь высокого класса, как Пуанкаре и Борель, также, казалось, не имели намерения строить единую хорошо организованную теорию, базирующуюся на удовлетворительной основе. Книги и статьи, посвященные вероятностным задачам, за незначительным числом исключений стра-

* Дух бесконечно малых величин (франц.).— Примеч. пер.

дали очень существенным недостатком — отсутствием математической строгости.

Работы русской школы, в частности Чебышева, Маркова и Ляпунова, весьма строгие и очень высокого уровня, за пределами России в то время были еще мало известны.

Существовавшую тогда ситуацию можно охарактеризовать с помощью нескольких цитат. Английский экономист Кейнс говорил в своей книге [61] по поводу классической теории вероятностей, что «для ученых она имела привкус астрологии или алхимии». Немецкий же математик фон Мизес в статье, написанной в 1919 году [98], утверждал, что «в настоящее время теория вероятностей не является математической дисциплиной», в то время как французский вероятностник Поль Леви, рассказывая в своей автобиографии [85] о первом знакомстве в годы юности с теорией вероятностей, указывает, что «в определенном смысле этой теории вообще не существовало — ее предстояло создать».

Согласно Лапласу и его последователям классическое определение вероятности события через пресловутые «равновозможные случаи» рассматривалось как универсальное и пригодное для использования даже тогда, когда не представлялось возможным дать четкое толкование природы этих «случаев». Предпринимались отдельные попытки преодолеть это затруднение, однако они оказывались неубедительными.

Некоторые пытались построить определение вероятности, исходя из свойств статистической частоты. Фон Мизес в статье 1919 года [98] и в своей книге [99] ввел подобное определение на аксиоматической основе. Он рассмотрел последовательность независимых испытаний, выполненных при одинаковых условиях, и постулировал существование предельных значений для частот различных наблюдаемых событий, а также инвариантность этих предельных значений для любой должным образом выбранной подпоследовательности испытаний. У него были верные последователи, но были также и суровые критики. Поль Леви позже выразил свое отношение к этому, заметив, что получение подобным способом удовлетворительного определения «столь же невозможно, как квадратура круга» [85, с. 79]. Меня лично работа фон Мизеса заинтересовала, хотя и в критическом плане, поскольку я рассчитывал на нечто более приемлемое. Оно должно было появиться, однако в 1920 году время для этого еще не пришло.

2. Центральная предельная теорема. Понятие «центральной предельной теоремы» было введено Д. Пойа в статье [103], написанной им в 1920 году; я еще вернусь к ней в следующих разделах. Согласно нынешней терминологии эта теорема утверждает, что распределение вероятностей суммы большого числа независимых случайных величин при выполнении соответствующих условий будет близко к нормальному (или гауссову). Для очень частного случая теорема была доказана де Муавром еще в 1733 году [100]. В общем виде эта теорема была сформулирована Лапласом, однако доказательство, предложенное им, было неполным. Если считать члены суммы малыми «элементарными» ошибками», то эту теорему можно было рассматривать как объяснение возникновения нормального распределения для ошибок наблюдения.

После ряда неудачных попыток, предпринятых многими с целью найти правильное доказательство общей теоремы, сформулированной Лапласом, перспективный подход предложил Чебышев [115, 116], воспользовавшийся методом моментов. Первое же полное доказательство было дано Ляпуновым в 1901 году, который оперировал аналитическим инструментом, известным ныне под именем характеристических функций. Работа Ляпунова была мало известна за пределами России, но мне очень повезло в этом отношении — я смог познакомиться с заметками по поводу его работы, сделанными немецким математиком Хаусдорфом, и они оказали колоссальное влияние на мою дальнейшую работу в этой области.

3. Первые работы по случайным процессам. В первое десятилетие нынешнего столетия было опубликовано несколько работ, которые для современного читателя выступают в качестве предтеч теории случайных процессов, созданной на протяжении 30-х годов. Все они были посвящены развитию во времени некоторых переменных процессов, подверженных случайным воздействиям.

Башелье в статье 1900 года [2], анализируя колебания цен на фондовой бирже, пришел к важному частному случаю случайного процесса. С этим же процессом встретился Эйнштейн в своей известной работе 1906 года, посвященной изучению броуновского движения [38]. Этот процесс был предложен в качестве математического описания непрерывных, хотя и исключительно нерегулярных путей частиц, находящихся в жидкости во взвешенном состоянии и подвергающихся случайным соударениям с молекулами.

В промежутке между появлением работ Башелье и

Эйнштейна Филипп Лундберг в 1903 году закончил в Упсале диссертацию [92] (она была написана на шведском языке), в которой рассмотрел сугубо дискретные изменения накопленного количества заявлений о выплате страхового возмещения, поданных в страховую компанию. В результате он пришел к случайному процессу совершенно иного типа, чем непрерывный процесс, описывающий броуновское движение. «Пуассоновский процесс», известный в настоящее время благодаря своим многочисленным приложениям, является частным случаем процесса Лундберга при равенстве всех сумм выплат по заявлениям о страховых возмещениях. При рассмотрении общего случая, развитого также и в ряде последующих работ, Лундберг воспользовался функциональным уравнением, которое представляет собой частный случай известного уравнения для процессов без «последействия», предложенного в 1931 году Колмогоровым [73] для общего класса непрерывных процессов и Феллером [43] в 1940 году для соответствующего класса дискретных процессов, включающего в себя процесс, изучавшийся в 1903 году Лундбергом, в качестве частного случая.

В 1909 году Эрланг в связи с изучением задач телефонной связи ввел пуассоновские процессы [39]; то же самое сделали Резерфорд и Гейгер применительно к изучению радиоактивного распада [113].

Все эти пионеры теории случайных процессов использовали математические методы с большей или меньшей степенями нестрогости, однако они обладали чудесной способностью интуитивно оперировать понятиями и методами, которые должны были дождаться 30-х годов, чтобы получить строгое обоснование.

III. ПОДГОТОВИТЕЛЬНОЕ ДЕСЯТИЛЕТИЕ: 1920—1929

1. Случайные процессы и предельные теоремы. Летом 1920 года я провел некоторое время в Кембридже (Великобритания), занимаясь работой в области теории чисел под руководством крупнейшего математика Г. Х. Харди. Там я встретился с одним американцем, моим сверстником, — Норбертом Винером; в своей автобиографии «Я — математик» [122, с. 59] он отметил как интересное совпадение встречу во Франции с Полем Леви и со мной на протяжении одной поездки в Европу, поскольку наши работы всегда были тесно связаны с тем, чем он занимался сам. Уже в том юном возрасте Норберт производил впечатление «большой личности». Во время той первой встречи нам не удалось обсудить вероятностные проблемы, но всего лишь три года спустя, в 1923 году, Винер опубликовал свою знаменитую работу «Дифференциальное пространство» [118], в которой за несколько лет до появления основных работ Колмогорова он ввел вероятностную меру в функциональном пространстве, создав таким образом строгую теорию случайных процессов, используемых для описания броуновского движения; сейчас эти процессы известны также под именем винеровских. Среди других результатов ему удалось показать, что почти все рассматриваемые траектории процесса являются непрерывными функциями, которые не имеют производной ни в одной точке. К сожалению, чтение статьи вызывало очень существенные трудности и многие, интересовавшиеся этой проблемой, и я в том числе не могли оценить её подлинного значения до тех пор, пока выдающиеся работы 30-х годов соответствующим образом не подготовили почву.

Кстати замечу, что первой моей вероятностной работой была короткая заметка [12], появившаяся в 1919 году и посвященная пуассоновскому процессу (она была написана по-шведски). В ней на основе простого набора необходимых и достаточных условий выводится выражение для соответствующего распределения вероятностей, хорошо известное в настоящее время. В этой связи я рассмотрел процесс Лундберга, описывающий страховой риск, однако моя работа, посвященная той же проблеме, была опубликована позже.

Что касается центральной предельной теоремы, то меня очень заинтересовали работы Д. Пойа [103] и Дж. У. Линдеберга [87], появившиеся в 1920 и 1922 годах соответственно. Пойа, венгерский друг Марсела Риса, часто посещал Швецию; как я уже отмечал, именно он ввел в своей работе название «центральная предельная теорема». Он ссылался на работу Ляпунова и предложил доказательство, основанное на использовании характеристических функций, подчеркнув их аналогию с методами, применявшимися в теории простых чисел. Кроме того, там обсуждался также метод моментов, использованный Чебышевым и в более общем виде Стильтьесом.

Линдеберг в работе 1922 года дал полное доказательство центральной предельной теоремы при более общих условиях, чем рассматривал Ляпунов. Он ввел известное условие Линдеберга, на котором я еще должен буду остановиться. Мне очень хотелось лично познакомиться с ним, и такая возможность представилась на математическом конгрессе, состоявшемся в Хельсинки летом 1922 года.

Линдеберг являлся профессором Хельсинкского университета, но, кроме того, у него была чудесная ферма, расположенная на востоке страны. Когда его упрекали за недостаточно активное занятие научной работой, он говорил: «Ну, на самом-то деле я — фермер». Если же кому-нибудь случалось заметить, что его ферма управляется не лучшим образом, он отвечал: «Естественно, ведь мое настоящее дело — быть профессором». Он очень нравился мне, и мы часто встречались в последующие годы.

Для задач страхового риска, которыми я занимался, было, однако, недостаточно знать, что некоторое распределение вероятностей является приблизительно нормальным; необходимо было иметь представление о величине ошибки, возникающей при замене изучаемого распределения нормальным. Ляпунов установил верхний предел этой ошибки. Я изучил его метод и в работе 1923 года [13] предложил упрощенный вариант его доказательства, а также числовую оценку ошибки, являющуюся небольшим улучшением результата Ляпунова. Мой вариант 1923 года теоремы Ляпунова для особенно важного случая тождественно распределенных переменных выглядел следующим образом.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, такие, что все x_i имеют нулевое среднее значение, среднее квадратичное отклонение σ и третий абсолютный момент β_3. Пусть G_n — функция распределения нормированной суммы:

$$z_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sigma n^{\frac{1}{2}}}, \qquad (1.1)$$

а Φ — функция нормального распределения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Тогда для всех $n > (\beta_3/\sigma^3)^2$ верно неравенство:

$$|G_n(x) - \Phi(x)| < \frac{3\beta_3}{\sigma^3} \cdot \frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}}}. \qquad (1.2)$$

Для случая, когда равнораспределенность x_i не предполагается, имеется соответствующая, несколько более сложная, теорема.

Вскоре, однако, стало ясно, что оценка разности, определяемая выражением (1.2), была мало удовлетворительной с точки зрения численных приложений к задачам страхового риска, на которые я ориентировался; значительная часть моей работы на протяжении 20-х годов была посвящена попыткам найти улучшенную оценку предпочтительно в форме асимптотического разложения остатка для больших значений.

В литературе по математической статистике, доступной мне в то время, рассматривались два вида разложения в ряд разности типа $G_n(x)—\Phi(x)$. Как отмечают в своей книге Гнеденко и Колмогоров [48], оба разложения были предложены Чебышевым, хотя их часто называют разложениями Эджворта и Шарлье. Я приведу здесь лишь выражение в явном виде для первого из них, рассмотренного Эджвортом в работе [37] сугубо формальным образом. Часто бывает проще иметь дело с рядом Шарлье, представляющим собой перегруппировку членов ряда Эджворта, однако он не позволяет получить наилучшую оценку. Шарлье в своей работе 1905 года утверждал, что его ряд обладает определенными асимптотическими свойствами, но его доказательство было совершенно неверным, так как в основе оно содержало неправильное использование того, что теперь называют формулой обращения для характеристических функций. Более того, утверждение, которое Шарлье считал доказанным, было справедливым лишь в измененном виде и при выполнении условий более жестких, чем заданные им (сравните с работой Крамера [33]). В действительности, никакого строгого рассмотрения асимптотических свойств таких рядов не проводилось, так что проблема все еще оставалась открытой. В предварительной работе 1925 года [14] и более полной работе 1928 года [16] я занялся этой проблемой и получил решение, справедливое при выполнении некоторых условий (сравните также с работой Крамера [19] и книгой Гнеденко — Колмогорова [48, глава 8]. Для частного случая одинаково распределенных случайных величин основная теорема из моей работы 1928 года выглядит следующим образом. (При определении порядка малости члена, характеризующего ошибку, «O», присутствовавшее в моем первоначальном варианте, заменено на «o» в соответствии с результатом Эссеена 1944 года [40]).

Пусть переменные x_i, входящие в выражение (1.1), независимы и одинаково распределены, причем все они характеризуются нулевыми средними значениями, средними квадратичными отклонениями σ и конечными моментами $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\sigma^2$, α_3, ..., α_k, где $k \geqslant 3$. Пусть для всех x_i заданы функция распределения $F(x)$ и характеристическая функция:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x). \tag{1.3}$$

Пусть

$$\limsup_{t\to\infty} |f(t)|<1. \tag{1.4}$$

В таком случае имеет место разложение:

$$G_n(x) = \Phi(x) + (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{p_j(x)}{n^{\frac{j}{2}}} + o\left(n^{-\frac{k-2}{2}}\right), \tag{1.5}$$

равномерное по x, где $p_j(x)$ — многочлен степени $3j-1$, коэффициенты которого зависят только от моментов α_3, ..., α_{j+2}. В частности,

$$p_1(x) = \frac{\alpha_3}{3!}(1-x^2).$$

Поскольку $k \geqslant 3$, можно убедиться в том, что условие (1.4) позволяет исключить коэффициент $\log n$ из верхней оценки ошибки в теореме Ляпунова. Важный частный случай, для которого условие (1.4) выполняется, возникает, когда функция распределения F содержит абсолютно непрерывную компоненту, не равную тождественно нулю.

В работе 1928 года [16] я рассмотрел также случай неодинаково распределенных величин и соответствующее разложение для плотности вероятности $G'_n(x)$. Кроме того, мне удалось показать, что при невыполнении условия (1.4) проинтегрированное среднее ряда (1.5) на малом интервале, содержащем точку x, все еще сохраняет необходимые асимптотические свойства.

В связи с этим отмечу, что много лет спустя в работе [30] 1963 года я рассмотрел асимптотическое разложение $G_n(x)$ в случае, когда предельное распределение является устойчивым, отличным от нормального. При выполнении определенных условий разложение, соответствующее (1.5) все еще существует, однако оно имеет более сложную форму.

2. Книги Леви 1925 года, планы относительно собственной книги. В то время как я был погружен в свою работу над асимптотическими разложениями, в 1925 году появилась книга Поля Леви «Calcul des probabilités»* [80]. Хотя я не мог полностью согласиться с его точкой зрения на основания теории вероятностей, я сразу понял, что появление книги стало важнейшей вехой в развитии математической теории вероятностей. Было очевидно, что это первая попытка представить теорию как единое целое, пользуясь математически строгими методами. В книге впервые было дано систематическое изложение теории случайных величин, распределений их вероятностей и их характеристических функций. Хотя уже в течение нескольких лет я применял эти понятия в моих работах, представленный Леви вариант теории позволил мне узнать много нового. В книге обсуждались центральная предельная теорема и устойчивые распределения вероятностей, а также имелась чрезвычайно интересная глава, посвященная кинетической теории газов.

Во время посещения Англии в 1927 году я встретился со своим учителем и старым другом Г. Х. Харди. Когда я рассказал ему о том, что заинтересовался теорией вероятностей, он заметил, что на английском языке по этому предмету нет ни одной удовлетворительной книги, и посоветовал мне таковую написать. Я был более чем готов последовать его совету, хотя и сознавал, что работа займет очень много времени. И действительно, лишь десять лет спустя, только в 1937 году, мой труд был готов для издания в серии «Cambridge Tracts in Math»** [19].

3. Основания. Подходы фон Мизеса и Леви к основаниям теории вероятностей были различны в своей основе, и я не мог считать себя согласным ни с одним из них. В работе фон Мизеса 1919 года [98] содержалось, однако, одно общее положение, которое я разделял всем сердцем, хотя мне казалось, что сам фон Мизес, когда строил свою общую теорию, не руководствовался вытекающими из него следствиями.

На 53-й странице своей работы фон Мизес высказал точку зрения, согласно которой теория вероятностей представ-

---

* «Теория вероятностей» (франц.). — Примеч. пер.

** «Кембриджские труды по математике» (англ.). — Примеч. пер.

ляет собой «одну из естественных наук точно так же, как геометрия или теоретическая механика». Смысл его теории состоит в описании определенных наблюдаемых явлений, причем «не точно, а с некоторой абстракцией и идеализацией». Другими словами, теорию вероятностей следует рассматривать в качестве математической модели некоторого класса наблюдаемых явлений.

В написанной по-шведски статье 1926 года [15] я обратился к этому положению фон Мизеса. Выразив свое согласие с ним, я сделал несколько дополнительных замечаний, из которых мне хотелось бы процитировать здесь следующее:

«Понятие вероятности следует вводить посредством чисто математического определения, из которого математические свойства вероятности и классические теоремы могут быть выведены при помощи чисто математических операций. ...Никакие возражения против такой теории, кроме базирующихся на чисто математической основе, не могут быть справедливы. С другой стороны, следует подчеркнуть, что такая математическая теория не говорит чего-либо о тех реальных событиях, которые будут происходить. Вероятностные формулы не могут определять характер реальных событий точно так же, как формулы классической механики не могут предписывать звездам осуществлять взаимное притяжение согласно закону Ньютона. Лишь опыт может направлять нас в этом отношении и оценивать приемлемость аппроксимации результатов наблюдений выбранной нами математической моделью».

Эти замечания все еще представляются мне вполне обоснованными, и очень приятно, что я опубликовал их за семь лет до того, как Колмогоров формализовал теорию вероятностей.

4. Новая русская школа. В конце 20-х годов стало ясно, что в Советском Союзе происходит интенсивное развитие работ в области теории вероятностей. В своей замечательной работе 1927 года С. Н. Бернштейн [7] рассмотрел распространение центральной предельной теоремы на суммы случайных величин, которые не обязательно должны быть независимыми. Он предложил интересный метод, который позволил работать с подобными случаями; я остановлюсь на нем ниже.

Основные русские работы того периода были, однако, сделаны двумя совсем молодыми математиками — А. Я. Хинчиным и А. Н. Колмогоровым, которым суждено было стать лидерами последующего развития этой области. В совместной работе 1925 года [70] они доказали знаменитую «теорему трех рядов», определяющую необходимые и достаточные условия сходимости ряда, членами которого являются независимые случайные величины. Вероятность сходимости такого ряда может быть равна только нулю или единице, что представляет собой частный случай так называемого «закона 0 или 1», открытого тогда же.

В работе 1928 года [71] Колмогоров доказал известное неравенство для сумм независимых случайных величин, являющееся существенно улучшенным обобщением хорошо известного элементарного неравенства Чебышева. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины с нулевыми средними значениями и конечными (но не обязательно равными) средними квадратичными отклонениями. В таком случае неравенство Колмогорова устанавливает, что

$$P\left(\max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{j} x_i \geqslant k\right) \leqslant \frac{E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{k^2} \tag{4.1}$$

Доказательство (4.1) и других неравенств подобного типа основывалось на квалифицированном использовании условных вероятностей и математических ожиданий и служило провозвестником общей теории этого раздела теории вероятностей, которую Колмогоров вскоре разработал. Неравенство (4.1) служит ценным инструментом во всех исследованиях, посвященных изучению сумм независимых случайных величин.

В 1929 году Колмогоров опубликовал [72] доказательство так называемого закона повторного логарифма, установленного до этого Хинчиным [62] для частного случая. Из центральной предельной теоремы следует, что для всякой функции $h(n)$, стремящейся к бесконечности по мере увеличения n, вероятность выполнения неравенства $z_n > h(n)$ будет стремиться к нулю по мере стремления n к бесконечности, где z_n — нормированная сумма независимых и тождественно распределенных переменных (1.1). Все же, рассматривая бесконечную последовательность $z_1, z_2, \ldots$, можно рано или поздно ожидать появления очень больших значений. Закон повторного логарифма дает точное выражение для неопределенного утверждения, которое устанавливает, что соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n}{(2\log\log n)^{\frac{1}{2}}} = 1 \tag{4.2}$$

будет выполняться с вероятностью, равной единице. Интересно отметить, что частный случай этого утверждения был доказан Хинчиным в 1923 году в работе [62], посвященной частоте появления различных цифр в двоичных дробях. Задача рассматривалась как относящаяся исключительно к теории меры, которая интересовала меня до того, как я начал заниматься теорией вероятностей. Общее утверждение, доказанное Колмогоровым, произвело огромное впечатление и расчистило путь для отождествления вероятности с мерой, которое он должен был вскоре осуществить.

IV. ВЕЛИКИЕ ПЕРЕМЕНЫ: 1930—1939

1. Стокгольмская группа. В этом разделе мне еще в меньшей степени, чем в предыдущих, удастся строго придерживаться хронологического порядка. Среди огромного числа новых идей, выдвинутых на протяжении 30-х годов, можно выделить несколько основных групп, эволюция которых будет рассматриваться отдельно, причем всегда с моей индивидуальной точки зрения. Сначала я сделаю несколько замечаний по поводу собственной деятельности в начале этого «героического периода» математической теории вероятностей.

По инициативе шведских страховых компаний в Стокгольмском университете была учреждена должность профессора по курсу «Актуарная математика и математическая статистика», и осенью 1929 года я стал ее первым обладателем. С самого начала и на протяжении последующих лет мне везло со студентами: я работал с группой честолюбивых и весьма хорошо подготовленных молодых людей. С глубоким интересом мы следили за новыми работами, появлявшимися за границей и старались внести собственный вклад в развитие «нашей» области математики. В первые годы этого периода мы в основном продолжали работы 20-х годов, связанные с предельными теоремами и процессами страхового риска, где вполне реальным казалось получение новых интересных результатов.

Осенью 1934 года наша группа с радостью приняла нового сотрудника, приехавшего к нам из-за границы. То были черные дни нацистского господства в Германии, когда так много выдающихся ученых покидали эту страну. Уилл Феллер, выгнанный из Кильского университета, приехал, чтобы присоединиться к нашей группе и остался в Стокгольме (на пять лет). Он приобрел массу друзей в Швеции, работая вместе с экономистами, биологами, а также сотрудниками нашей группы вероятностников. Филлер учился в Геттингене и глубоко проникся добрыми традициями этого математического центра. Мы очень старались найти для него постоянную работу в Швеции, что в те предвоенные годы было почти невозможным, и с глубоким сожалением мы наблюдали за его отъездом в Соединенные Штаты, где его ждала выдающаяся карьера. В следующих разделах я остановлюсь на работах, выполненных им в годы, которые он провел среди нас.

2. Основания. Если вернуться к истокам новой эры в математической теории вероятностей, то становится очевидным, что на самом деле переворот в этой области произошел после появления книги Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» [75]. В ней он привел обоснования абстрактной теории, предназначенной для использования в качестве математической модели некоторых классов наблюдаемых событий. Основное понятие теории в настоящее время широко известно — это классическая концепция вероятностного пространства (Ω, A, P), где Ω — пространство, образованное точками ω, которые рассматриваются как элементарные события; A—σ-алгебра множеств в Ω и P — вероятностная мера, определенная для всех A — измеримых событий, т. е. для всех множеств S, принадлежащих A.

Хорошо известный сегодня способ введения случайной величины $x=x(\omega)$ и случайного процесса $x(t)=x(t, \omega)$, где t принадлежит некоторому параметрическому пространству T, в 1933 году представлял собой существенное нововведение. Стало ясно, что при подобном подходе случайный процесс определяет распределение вероятностей в пространстве X всех функций $x(t)$ переменной t. Конечномерным распределением процесса $x(t)$ называется n-мерное совместное распределение случайных переменных $x(t_1)$, ..., $x(t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ — произвольное конечное множество точек. Семейство всех такого рода распределений удовлетворяет некоторым очевидным условиям совместимости. Одна из основных теорем, содержащихся в книге Колмогорова, утверждает, что если задано семейство конечномерных распределений и оно удовлетворяет условиям согласованности, то существует случайный процесс, соответствующий заданным распределениям. Более того, вероятность принадлежности функции $x(t)$ множеству S, входящему в пространство функций X, однозначно определяется конечномерными распределениями для всех борелевских множеств в X, т. е. для всех множеств S, принадлежащих наименьшей σ-алгебре множеств в X, содержащей все множества функций, удовлетворяющих конечному множеству неравенств вида $a_i<x(t_i)<b_i$. (Это относится к случаю действительных функций $x(t)$; расширение на комплексный случай очевидно.) В результате было установлено строгое основание для изучения случайных процессов и начался быстрый как количественный, так и качественный рост работ этого направления.

Вскоре, однако, выяснилось, что часто встречаются множества функций, интересные с прикладной точки зрения, но не являющиеся борелевскими. Так, для винеровского процесса и процесса страхового риска Лундберга (они упоминались выше в разделах II и III) следовало бы определить вероятность множества всех функций $x(t)$, таких, что $x(t)<a$ при $0<t<b$, но эти множества — не борелевские, и соответствующие вероятности не определяются однозначно конечномерными распределениями. Подобные случаи требуют изменения общих определений. В книге Пэли и Винера [120] приведен один из вариантов модификации для случая винеровских процессов, и аналогичным методом можно воспользоваться в случае процесса страхового риска. Общий случай проанализирован Дубом в серии глубоких работ, результаты которых были объединены в его выдающейся книге [35], появившейся в 1953 году. Все эти работы, однако, покоятся на основаниях, данных Колмогоровым.

В книге Колмогорова 1933 года содержится глава, посвященная условным вероятностям и математическим ожиданиям, в которой эти понятия вводятся и анализируются при помощи принципиально нового метода.

Книга Колмогорова все еще остается основным документом современной теории вероятностей. Если в 1920 году можно было говорить о том, что эта теория не является разделом математики (сравните с разделом II), то после выхода этой книги в 1933 году уже невозможно было выступать с такой точкой зрения.

3. Марковские процессы. В статье [73], опубликованной в 1931 году, за два года до появления «Grundlagen»*, Колмогоров изложил результаты изучения одного общего класса случайных процессов, который позже получил известность под названием марковских процессов в связи с тем, что такие процессы являются естественным обобще-

* «Основные понятия» (нем.).— Примеч. пер.

нием классического понятия марковских цепей. Рассмотрим процесс $x(t)$, где t — действительный параметр, представляющий время. Если при любом $t_0<t_1$ условное распределение $x(t_1)$, связанное с гипотезой $x(t_0)=a$, не зависит от любой дополнительной информации о значениях, принимаемых $x(t)$ при $t<t_0$, то $x(t)$ называется марковским процессом. Колмогоров показал, что распределения вероятностей, связанные с марковским процессом, удовлетворяют некоторым функциональным уравнениям, которые при выполнении определенных условий непрерывности сводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа; последние однозначно определяют соответствующие распределения.

В нашей стокгольмской группе именно Феллер посвятил развитию этой общей теории Колмогорова две работы ([42] и [43], последняя была опубликована в первый год его пребывания в Соединенных Штатах), в которых рассматривались дифференциальные уравнения в частных производных для непрерывного процесса и интегро-дифференциальные уравнения, возникающие в дискретном случае. Хорошо известно, что с тех пор марковские процессы стали областью интенсивных исследований.

Хотя работа Колмогорова 1931 года и ее продолжение Феллером произвели на меня глубокое впечатление, сам я не занимался исследованиями в области теории универсальных марковских процессов, быть может, из-за того, что не считал себя достаточно хорошо знакомым с дифференциальными уравнениями в частных производных. Существует, однако, один класс марковских процессов, который уже в начале 30-х годов представлял непосредственный интерес для тех из нас, кто занимался случайными процессами, связанными с теорией страхового риска. Я имею в виду процессы с независимыми приращениями, которые будут рассматриваться в следующем разделе.

4. Процессы с независимыми приращениями. В 1932 году Колмогоров предложил выражение для характеристической функции случайной переменной $x(t)$, соответствующей случайному процессу, который удовлетворяет следующим условиям [74]:

(1) $x(t)$ имеет нулевое среднее значение и конечный момент второго порядка: $x(0)=0$.

(2) При $0 \leqslant t_0<t_1< \ldots <t_n$ разности $x(t_i)-x(t_{i-1})$ являются независимыми случайными переменными.

(3) Распределение вероятностей $x(t_i)-x(t_{i-1})$ зависит только от разности t_i-t_{i-1}.

Процессы такого типа известны как процессы со стационарными независимыми приращениями. Эти процессы были исследованы при более общих условиях, не включающих допущения о существовании конечных моментов, в превосходной работе Поля Леви [81], появившейся в 1934 году. Он получил классическое общее выражение для характеристической функции $x(t)$. Другое выражение, с которым в некоторых случаях работать оказывается удобнее, было предложено в 1937 году Хинчиным [67].

В нашей стокгольмской группе эти работы были восприняты как откровение и с энтузиазмом изучались. После появления в 1932 году формулы Колмогорова уже стало ясно, что винеровский и лундберговский процессы страхового риска характеризуют противоположные частные случаи одного и того же общего выражения. Действительно, при выполнении перечисленных выше условий (1) — (3) характеристическая функция

$$f(z, t)=E\left(e^{izx(t)}\right)$$

определяется по формуле Колмогорова как

$$\log f(z, t)=t\left(-\frac{1}{2}\sigma^2z^2+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izu}-1-izu}{u^2}\,dK(u)\right),$$

где $\sigma^2\geqslant 0$ — константа, а $K(u)$ — ограниченная и неубывающая функция, непрерывная при $u=0$.

Очевидно, что если $K(u)$ тождественно равна нулю, то имеет место винеровский процесс. Леви в работе [81] сделал интересное замечание, заключающееся в том, что если $x(t)$ является почти наверное непрерывной функцией t, то этот случай возникает неизбежно.

Если же, с другой стороны, $\sigma^2=0$ и $K(u)=\lambda\int\limits_{-\infty}^{u}v^2dG(v)$,

где λ — положительная константа, а $G(v)$ — функция распределения, то имеет место процесс страхового риска, причем заявления о выплате страхового возмещения поступают в соответствии с пуассоновским процессом с параметром λ, а суммы страховых возмещений являются независимыми случайными величинами, каждая из которых характеризуется функцией распределения G. Изменения $x(t)$ в данном случае сугубо дискретны. Мы в Стокгольме изучали именно этот случай. $x(t)$ здесь представляет сумму выплат страховых возмещений, накопленную к моменту t, и «задача о разорении», имеющая особое значение для страхового дела, связана с вероятностью того, что $x(t)<a+bt$ на протяжении всего периода $0<t<T$. К. О. Сегердаль, один из членов нашей группы, в диссертации, представленной в 1939 году [114], изучил эту задачу и доказал ряд важных неравенств, связанных с вероятностью разорения.

5. Безгранично делимые распределения, арифметика распределений. Для случайной величины x, которую можно представить в виде $x=x_1+x_2$, где x_1 и x_2 независимы, Леви предложил считать, что ее распределение представляет собой произведение распределений x_1 и x_2 и содержит каждое из них в качестве множителей. Если нетривиальное представление такого вида отсутствует, то говорят, что распределение неприводимо.

Для случая, когда $x(t)$ — случайная переменная, связанная с процессом со стационарными и независимыми приращениями, в работе Леви 1934 года [81] было показано, что $x(t)$ можно представить в виде суммы произвольного количества независимых случайных величин с одним и тем же распределением. В таком случае говорят, что распределение $x(t)$ является безгранично делимым; формула Леви определяет общее выражение для распределений такого рода. Нормальное и пуассоновское распределения, а также устойчивые распределения — все они принадлежат этому классу.

В работе 1934 года Леви высказал предположение о том, что любой из указанных выше сомножителей нормального распределения сам должен быть нормальным. В нескольких последующих работах он повторил это предположение, указав, что считает его истинным с весьма высокой вероятностью, но не в состоянии его доказать. В начале 1936 года мне удалось доказать это предположение, и я опубликовал его в работе [18]. В своей автобиографии, выпущенной в 1970 году [85], Леви высказывает сожаление о том, что ему не удалось найти доказательство самому (с. 111), поскольку оно основано на непосредственном использовании теории характеристических функций, которой он систематически пользовался. Вскоре Райкову [105] удалось доказать соответствующее утверждение для пуассоновского распределения.

В 1937 году Хинчин [68] доказал общую теорему, утверждавшую, что любое распределение можно представить в виде произведения безгранично делимого распределения и, самое большее, счетного числа неприводимых распределений. В общем случае эта факторизация не единственна.

6. **Предельные теоремы.** В работах Ляпунова и Линдеберга, упоминавшихся выше в разделе III, установлены достаточные условия справедливости центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных величин. В интересной книге, вышедшей в 1933 году, Хинчин [64] дал сводку основных результатов, полученных к тому времени в этой области. Однако все еще оставалась открытой проблема установления условий, являющихся одновременно необходимыми и достаточными, так же как и случай, когда не предполагается существование конечных моментов случайных слагаемых в сумме. Общую задачу, которую в течение 30-х годов пытались решить несколько исследователей, можно сформулировать следующим образом.

Если x_1, x_2, ..., — независимые случайные величины, то требуется найти условия, при которых существуют константы a_n и b_n, такие, что распределения вероятностей нормированных сумм

$$(x_1+ \dots +x_n-a_n)/b_n$$

приближаются к нормальному распределению по мере стремления n к бесконечности.

Важный вклад в изучение этой задачи принадлежит Леви и Хинчину, однако лишь Феллеру удалось впервые получить полное решение; оно содержалось в работе [41], состоящей из двух частей и написанной в 1935 и 1937 годах соответственно во время работы в нашей стокгольмской вероятностной группе.

Феллер показал, что искомые необходимые и достаточные условия можно получить при помощи соответствующей модификации достаточного условия, найденного в 1922 году Линдебергом. В частном случае, когда x_i имеют функции распределения F_i с нулевыми средними значениями и конечными средними квадратичными отклонениями σ_i, такими, что $\sigma_i/s_n \to 0$ при $n \to \infty$ для $i=1, 2, \dots, n$, где, как обычно $s_n^2=\sigma_1^2+ \dots +\sigma_n^2$, можно положить $a_n=0$ и $b_n=s_n$; Феллер доказал, что при этом исходное условие Линдеберга

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon s_n} x^2 dF_i(x) = 0$$

для любого заданного $\varepsilon > 0$ является необходимым и достаточным условием сходимости к нормальному распределению. Он получил также и более сложные условия для случая, когда x_i не имеют конечных моментов.

Выдающийся итальянский математик Ф. П. Кантелли работал над математическими проблемами актуариата, аналогичными тем, которыми занимались некоторые члены стокгольмской группы. В работе 1933 года [10] он предложил улучшенный вариант закона повторного логарифма, упоминавшегося выше в разделе III. В процессе переписки с ним я рассмотрел измененный вариант этой задачи, в котором результат может быть «предельно возможной точности». Он был опубликован в моей работе 1934 года [17]. Утверждение такого типа для классического закона повторного логарифма в виде (4.2) было доказано Феллером в 1943 году [44]. Приведу для сравнения сначала теорему Феллера 1943 года, а затем свою 1934 года, причем в обоих случаях без подробного перечня условий, при которых доказывается справедливость результатов.

Феллер доказал (в приведенных обозначениях), что вероятность

$P(|x_1 + \ldots + x_n| < \mu_n s_n)$ для всех достаточно больших n равна 1 или 0 в зависимости от того, является ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{s_n^2} \mu_n e^{-\frac{1}{2}\mu_n^2}$$

сходящимся или расходящимся.

С другой стороны, в моей работе 1934 года эта задача ставилась несколько иначе. Вместо простой последовательности независимых случайных величин x_1, x_2, ..., я рассмотрел двойную последовательность:

$$\begin{array}{l} x_{11}, \\ x_{21},\ x_{22}, \\ \ldots \\ x_{n1},\ x_{n2},\ \ldots,\ x_{nn}, \end{array}$$

все члены которой предполагаются независимыми, имеющими нулевые средние значения и конечные средние квадратические отклонения σ_{ij}. Обозначив $s_n^2 = \sigma_{n1}^2 + \ldots + \sigma_{nn}^2$, я показал, что вероятность $P(|x_{n1} + \ldots + x_{nn}| < \lambda_n s_n)$

для всех достаточно больших n равна 1 или 0 в зависимости от того, является ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2}$$

сходящимся или расходящимся.

Аналогичное, однако значительно более существенное, обобщение задачи предельных распределений для сумм независимых случайных величин в целом было дано Хинчиным в работе [67] 1937 года, за которой затем последовали работы Гнеденко [47] и других русских авторов. Здесь я остановлюсь лишь на основных направлениях их деятельности, подробности которой можно найти в интересной книге Гнеденко и Колмогорова [48].

Рассмотрим двойную последовательность случайных величин:

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k_1},$$
$$\ldots$$
$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n},$$

в которой все случайные величины, находящиеся в одной и той же строке, предполагаются независимыми, и пусть z_n обозначает сумму случайных величин строки n. Допустим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\,(|x_{nk}| > \varepsilon)$$

для $k=1, \ldots, k_n$. Для такого случая в работе Хинчина 1937 года получен следующий фундаментальный результат. Для того чтобы F являлась предельной функцией распределения случайных величин $z_n - b_n$, полученных из указанной двойной последовательности, где b_n — произвольная константа, необходимо и достаточно, чтобы F была безгранично делимой. Таким образом, класс всех возможных предельных законов, связанных с суммами рассматриваемого типа, совпадает с классом всех безгранично делимых функций распределения. Едва ли стоит добавлять, что мы в нашей стокгольмской группе с огромным интересом следили за развитием новых идей нашими русскими коллегами.

7. **Характеристические функции.** Использование аналитического инструмента, более или менее эквивалентного известному нам под названием характеристической функции, восходит ко временам Лагранжа, Лапласа и Коши. Как мы отмечали выше, Ляпунов пользовался им при дока-

зательство центральной предельной теоремы. Первое систематическое изложение теории характеристических функций было дано, однако, только в книге Леви 1925 года [80], о которой шла речь в разделе III. Я пользовался этим методом в своей работе по асимптотическим разложениям, и на протяжении 30-х годов мы в стокгольмской группе пытались развивать это направление. Результатом такой работы было полученное мной доказательство предложения Леви, связанное с нормальным распределением (оно упоминалось в разделе IV). В нашей совместной статье с Г. Волдом [34], появившейся в 1936 году и посвященной многомерным распределениям, были рассмотрены обобщения характеристических функций и центральной предельной теоремы.

В том же 1936 году я завершил работу над книгой по математической теории вероятностей, которую меня побудил писать Г. Х. Харди в 1927 году. Она была опубликована в начале 1937 года в «Кембриджских трудах по математике» под названием «Случайные величины и распределения вероятностей» [19]. В ее основу я положил аксиоматику Колмогорова, и книга была посвящена главным образом подробному изложению теории распределений вероятностей в конечномерных пространствах и их характеристических функций применительно к таким проблемам, как центральная предельная теорема, соответствующие асимптотические разложения и случайные процессы с независимыми приращениями.

В области общей теории характеристических функций мне удалось несколько дополнить результаты Леви. К сожалению, при этом я допустил досадную ошибку, которую удалось исправить лишь в последующих изданиях книги (1963 и 1970 годы). Поскольку этот вопрос представляет некоторый интерес, я остановлюсь на нем несколько подробнее.

Известная «теорема непрерывности» для характеристических функций утверждает, что последовательность функций распределения F_n сходится к функции распределения F во всех точках непрерывности последней в том и только том случае, если соответствующие характеристические функции $f_n(t)$ сходятся при всех t к предельной функции, непрерывной при $t=0$. В утверждении теоремы, приведенном в первом издании книги, требовалась лишь сходимость $f_n(t)$ в некотором конечном интервале $|t|<c$. Хинчин в своем письме сообщил мне об этой ошибке. Достаточно

указать, что можно найти две характеристические функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, равные при $|t|<1$, но не равные тождественно. Действительно, рассмотрим

$$f_1(t)=f_2(t)=1-|t|$$

при $|t|\leqslant 1$ и пусть $f_1(t)$ — периодическая функция с периодом 2 и $f_2(t)=0$ при $|t|>1$. Легко убедиться, что обе эти функции — характеристические. Последовательность, члены которой поочередно равны f_1 и f_2, сходится, таким образом, при $|t|<1$, а не при любых t, откуда следует ложность утверждения, содержавшегося в первом издании моей книги.

Могу добавить в этой связи, что в работе 1939 года [21] я привел ряд теорем о представлении функций интегралами Фурье, которые, помимо других результатов, содержали упрощение теоремы Бохнера, определявшей необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная функция являлась характеристической функцией некоторого распределения вероятностей.

8. Стационарные процессы. Сейчас мне придется отступить на несколько лет назад и остановиться на новом важном направлении развития нашей науки, возникшем в 30-е годы.

В 1934 году Хинчин опубликовал основополагающую работу [65], в которой вводился класс стационарных случайных процессов. Он указал, что марковскими процессами нельзя пользоваться в тех случаях, когда предыстория рассматриваемой системы оказывает существенное влияние на прогноз ее развития в будущем, как, например, имеет место в статистической механике. В качестве инструмента, подходящего для изучения подобных систем, им был предложен класс стационарных процессов.

Хинчин определил как класс стационарных в узком смысле процессов, так и класс процессов, которые здесь я буду просто называть стационарными. Процесс $x(t)$ с непрерывным временным параметром t называется стационарным в узком смысле, если соответствующие конечномерные распределения инвариантны сдвигам во времени. Процесс называется стационарным, если эта инвариантность сохраняется для его моментов первого и второго порядка. Изучая результаты основополагающей статьи Хинчина [65] и дальнейшие достижения в этой области, я пришел впоследствии к рассмотрению общего случая комплексного процесса $x(t)$, непрерывного в среднеквадратическом смысле, и такого, что

$$Ex(t)=0, \quad Ex(t)\overline{x(u)}=r(t-u).$$

Ковариационная функция $r(t)$ непрерывна при этом для всех действительных t, и Хинчин показал, что она допускает спектральное представление.

$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}dF(u), \tag{8.1}$$

где спектральная функция $F(u)$ — действительная неубывающая и ограниченная. На основе такого представления он получил ряд свойств функции $r(t)$ и доказал, что среднее по времени

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\,dt$$

сходится в среднеквадратическом смысле при $T\to\infty$, и это эквивалентно эргодической теореме фон Неймана.

В несколько более ранней работе [63] Хинчин рассмотрел случай стационарного в узком смысле процесса с дискретным временем, т. е. последовательность случайных величин $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$, удовлетворяющую условиям стационарности в узком смысле. Для этого случая он доказал, что даже среднее по времени

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$

сходится с вероятностью единица, что для такого процесса эквивалентно эргодической теореме Биркгофа. Соответствующий результат для процессов с непрерывным временем был несколько позже доказан Колмогоровым [76].

Существуют интересные связи между теорией стационарных процессов Хинчина и более ранней работой Норберта Винера по обобщенному гармоническому анализу.

В 1930 году Винер опубликовал обширную работу, посвященную этой теме [119]; в ней рассматривались комплексные функции f, у которых предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(u+t)\overline{f(u)}\,du=r(t) \tag{8.2}$$

существует при всех действительных t. Свойства предельной функции r очень близки свойствам ковариационной функции стационарного процесса. В частности, она непрерывна при любых t, если непрерывна при $t=0$, и в этом случае допускает спектральное представление вида (8.1). Есть основания ожидать, что винеровское соотношение (8.2) будет в принципе справедливо для реализаций стационарного процесса.

Эту работу Винера, так же как и его работу 1923 года по дифференциальному пространству, понять нелегко, однако Масани в [95] дал очень доступное ее изложение, написанное с современных позиций. Он показал, в частности, что Винер рассмотрел пример объекта, который позже был назван нормальным стационарным процессом; любая реализация такого процесса с вероятностью единица удовлетворяет соотношению Винера (8.2). Мне хотелось бы, однако, отметить, что нетрудно найти пример, где это свойство отсутствует. В самом деле, пусть нормальный и действительный стационарный процесс имеет периодическую ковариационную функцию с периодом 2 и пусть $r(t)=1-|t|$ при $|t| \leqslant 1$. В таком случае можно показать, что для любого заданного t существует множество реализаций рассматриваемого процесса с положительной мерой и таких, что первый член винеровского соотношения (8.2) не сходится к конечному пределу при $T \to \infty$.

Работа Хинчина по стационарным процессам [65] оказала очень существенное влияние на последующее развитие. Было очевидно, что этот новый тип случайных процессов является подходящей математической моделью не только в статистической механике, но также и в ряде других отраслей, таких, как, например, метеорология и экономика. Введение таких процессов открыло, в частности, новые возможности для исследования явлений, имеющих склонность к периодичности поведения, и для работ в области теории информации.

В нашей стокгольмской группе этой областью занялся Херман Волд, рассмотревший в своей диссертации в 1938 году [123] стационарные процессы с дискретным временем, т. е. стационарные последовательности случайных величин. Он изучил их ковариационные и спектральные свойства и показал возможности их приложения к целому ряду статистических задач. Наиболее значительным из его результатов явилось доказательство для класса процессов такого типа важной теоремы разложения, которая, как было показано позже, оказалась справедливой с некоторыми изменениями для процессов более общего типа. Он доказал, что для стационарной последовательности x_n существует единственное разложение

$$x_n = u_n + v_n,$$

где u_n и v_n — взаимно независимые стационарные последовательности, такие, что (на современном языке) u_n абсолютно недетерминированна, а v_n — детерминированна. Кроме того, последовательность u_n можно представить как

$$u_n = \sum_{i=-\infty}^{n} c_{n-i} z_i,$$

где z_i — взаимно независимые случайные величины, а c_i — неслучайные константы.

В работе 1940 года [22] я рассмотрел ковариационные свойства стационарного векторного процесса $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_q(t))$ с непрерывным временем t. Я доказал, что спектральное представление смешанных ковариационных функций

$$r_{mn}(t) = Ex_m(t+u)\overline{x_n(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF_{mn}(u), \qquad (8.3)$$

где F_{mn} — комплексные функции с ограниченным диапазоном изменения, такие, что приращения ΔF_{mn} в любом интервале образуют неотрицательную эрмитову матрицу. Это означает, что функция матрицы $\mathbf{F}$ с элементами F_{mn} не убывает; она представляет собой сумму трех компонент: абсолютно непрерывной, чисто дискретной и сингулярной. Я доказал также наличие соответствующих свойств у векторного процесса с дискретным временем.

9. Париж, Лондон и Женева, 1937—1939. Весной 1937 года меня пригласили в Париж, чтобы прочесть несколько лекций в Сорбонне. Из французских вероятностников я раньше был знаком с Фреше, но это была моя первая встреча с Полем Леви и рядом представителей более молодого поколения, в частности с Деблином, Дюге, Форте и Лоэвом. В молодые годы Фреше был выдающимся математиком и являлся одним из пионеров функционального анализа. Вероятностными работами он занялся уже в довольно преклонном возрасте, и я вынужден отметить, что его результаты не произвели на меня глубокого впечатления. С другой стороны, в 1937 году было совершенно очевидно, что Леви является одним из лидеров в области теории вероятностей, особенно после появления его книги

«Суммирование случайных величин» [83]. Кстати, в предисловии к этой книге он заметил, что решил написать ее после того, как получил в начале 1936 года мое письмо с доказательством его предположения о нормальном распределении. Среди более молодых ученых выделялся Деблин, которому уже тогда принадлежали выдающиеся результаты, и его гибель в первые месяцы войны была большой потерей для науки.

Позже, в том же 1937 году, в Женеве состоялась конференция по теории вероятностей. Из Стокгольма на ней присутствовали Феллер и я; зрелище такой большой группы именитых вероятностников, собравшихся вместе, произвело на меня очень сильное впечатление. Среди моих новых знакомых были Штейнгауз из Польши, Хопф из Германии и Ежи Нейман, еще работавший в то время в Англии. Несколько коллег из Советского Союза также приняли приглашение и сообщили темы докладов, с которыми они собирались выступить, но, к нашему величайшему сожалению, никто из них не приехал. Нейман прочел доклад, посвященный разработанной им теории доверительных интервалов, бывших в то время совершенно новым понятием. На той ранней стадии его идеи еще не были приведены к окончательному виду, однако и Фреше и Леви отнеслись к ним весьма критически. К этому моменту я уже прочел его работу [101], посвященную этой проблеме, и пришел к заключению, что его основные идеи были совершенно справедливы, что в действительности затем и подтвердилось. Феллер рассказал об аксиоматике, а я прочел доклад о «больших отклонениях», связанных с центральной предельной теоремой [20]. Если (в обозначениях раздела III) допустить, что x стремится к бесконечности при стремлении к бесконечности n, то и $G_n(x)$ и $\Phi(x)$ стремятся к единице, так что утверждение теоремы Ляпунова становится очевидным. В моей работе были рассмотрены отношения

$$\frac{1-G_n(x)}{1-\Phi(x)} \text{ и } \frac{G_n(x)}{\Phi(x)},$$

где x и n стремятся к ∞ в первом случае и к $-\infty$ во втором. Я показал, что при выполнении определенных условий для каждого случая можно найти асимптотическое разложение.

Первое обобщение этих результатов было получено в 1943 году Феллером, который использовал их при улучшении закона повторного логарифма [44], упоминавшемся в разделе IV. Дальнейшие очень существенные обобщения были получены Ю. В. Линником и его ленинградской группой. Обзор их работ приведен в прекрасной книге Ибрагимова и Линника, опубликованной в 1965 году [55].

В октябре 1938 года я посетил Англию. Это было вскоре после мюнхенской конференции, и вопрос «мир или война» уже занимал все умы. В Кембридже я встретился со своим старым учителем и другом Г. Х. Харди, который занимал квартиру Ньютона в Тринити-колледже. Он выразил свое удовлетворение по поводу учебника, написанного мной по его предложению. В Лондоне меня приняли Р. А. Фишер, Уильям Элдертон и Эгон Пирсон; я познакомился с некоторыми работами в области математической статистики, которыми они занимались. Нейман к этому времени уже находился в Калифорнии.

Летом 1939 года в Женеве снова состоялась конференция — на этот раз она была посвящена математической статистике. Я был счастлив познакомиться с Сэмом Уилксом и Морисом Бартлеттом, которые прочли интересные доклады. Нейман сам не приехал, но представил основной доклад [102] по теории проверки статистических гипотез, сформулированной им незадолго до конференции в сотрудничестве с Эгоном Пирсоном. Среди событий этой конференции мне вспоминается беседа с Р. А. Фишером. Я выразил ему свое восхищение по поводу геометрической интуиции, проявленной им в связи с распределениями вероятностей в многомерных пространствах, и получил довольно кислый ответ: «Меня иногда обвиняют в интуиции как в преступлении!»

Когда в июле 1939 года я покидал Женеву, было совершенно ясно, что война стремительно надвигается.

V. ВОЕННЫЕ ГОДЫ: 1940—1945

1. Изоляция в Швеции. Во время войны наши международные контакты были сведены к минимуму. Швеция оставалась нейтральной, но вокруг шла война: Дания и Норвегия были оккупированы нацистами, а Финляндия воевала с Россией. Было крайне мало возможностей обмениваться литературой или письмами с коллегами в Англии, Франции и Соединенных Штатах и совсем никаких — в Советском Союзе. Мы тем не менее пытались развивать свои исследования настолько, насколько это было возможно.

В диссертации 1940 года [93] Уве Лундберг, член нашей стокгольмской группы, исследовал новый класс случайных процессов и использовал его при решении ряда статистических задач, связанных со страхованием, не включающим страхование жизни. Основываясь на выдвинутых им принципах, актуарии во многих странах интенсивно развивали эту тему.

В феврале 1941 года я организовал в Стокгольме конференцию по математической теории вероятностей. Мы с радостью приветствовали нескольких гостей из Дании и Финляндии; в Норвегии нацистский оккупационный режим был более суровым, и никто из наших коллег оттуда приехать не смог. Гаральд Бор и Берге Иессен из Дании прочитали доклад об основаниях теории вероятностей и ее связях с математическим анализом, а Густав Эльфвинг из Финляндии — о марковских процессах. Несколько членов нашей стокгольмской группы доложили о результатах своих диссертаций (о них уже упоминалось выше), а я сообщил о теореме, связанной со спектральным представлением стационарного случайного процесса, которую я непосредственно перед этой конференцией доказал. Если $x(t)$ — стационарный процесс, рассмотренный в разделе IV, с ковариационной функцией, имеющей спектральное представление вида (8.1), то существует процесс с ортогональными приращениями $z(u)$, такой, что при соответствующем задании стохастического интеграла

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dz(u), \qquad (1.1)$$

у которого (обозначения стандартные)

$$Edz(u)=0, \quad E|dz(u)|^2=dF(u).$$

Это показывает, каким образом процесс $x(t)$ аддитивно строится из элементарных гармонических колебаний $e^{itu} dz(u)$, каждое из которых имеет угловую частоту u, в то время как амплитуда и фаза являются случайными величинами, определяемыми $dz(u)$.

В 1942 году я опубликовал работу [23] по спектральному представлению (1.1), в котором определенно указывалась его связь с винеровским обобщенным гармоническим анализом. Мне, однако, еще не было ясно, что этот результат на самом деле означает установление вероятностного варианта теоремы Стоуна о спектральном представлении унитарной группы в гильбертовом пространстве. Метод, которым я пользовался, предусматривал использование стохастических интегралов Фурье, но не теории гильбертова пространства. Фундаментальное значение этой теории стало понятно нам лишь в послевоенные годы.

Н. Ардей, молодой датский физик, написал диссертацию, посвященную приложению случайных процессов к теории космического излучения [1], и, к моему величайшему удивлению, я получил разрешение приехать в Копенгаген весной 1943 года в качестве члена экзаменационного комитета. Диссертация была хорошей, мне было очень приятно снова увидеться с датскими коллегами, но больно было наблюдать немецкие войска, марширующие по улицам Копенгагена.

В 1944 году Эссеен подготовил в Упсале диссертацию [40] по Фурье — анализу функций распределения. Это была очень существенная работа, основанная на глубоком изучении свойств характеристических функций. Эссеен показал, в частности, что коэффициент log n в верхней оценке (1.2 раздела III) остатка в теореме Ляпунова можно всегда опускать, обобщив таким образом мой результат, справедливый лишь при выполнении условия (1.4) (он упоминался в разделе III в связи с (1.5). Им были получены также оценки остатка, зависящие как от n, так и от x, и улучшение асимптотического разложения, предложенного мной в работе 1928 года.

Поскольку казалось, что конец войны еще далек, я решил использовать годы вынужденной изоляции для того, чтобы написать книгу. Эта книга должна была быть закончена в 1946 году и называлась «Математические методы статистики» [24]. Процитирую следующие строки из предисловия к ней:

«На протяжении последних 25 лет статистическая наука благодаря работам блестящих школ английских и американских статистиков, среди которых прежде всего следует отметить профессора Р. А. Фишера, достигла огромного прогресса. На протяжении этого же периода классическая теория вероятностей приобрела статус, в основном благодаря работе французских и русских математиков, настоящей математической теории, удовлетворяющей современным стандартам строгости. Задача данного труда заключается в том, чтобы объединить эти две линии развития, дав изложение математической теории современных статистических методов в той их части, которая базируется на понятии вероятности».

Таким образом, эту книгу не следует считать вкладом в математическую теорию вероятностей — скорее, она представляет собой труд, посвященный использованию теории вероятностей в современных статистических методах. Книга посвящена моей жене, поддерживавшей и ободрявшей меня на протяжении всей работы, как она это делала всегда. Когда еще писал книгу, я как-то сказал жене, что надеюсь на то, что эта книга станет моим входным билетом в новый послевоенный мир. Вероятно, в какой-то степени так оно и было; сегодня она издана на английском, русском, испанском, польском и японском языках.

2. Развитие исследований в других странах в военные годы. В тех редких случаях, когда из Соединенных Штатов приходила почта, мы получали письма и оттиски от Феллера и имели благодаря этому возможность следить за его работой над марковскими процессами и усовершенствованием закона повторного логарифма, упоминавшегося в разделе IV.

Многие математики в воюющих странах были связаны с работами по управлению зенитным огнем и фильтрацией помех радиолокаторов. Оказалось, что стационарные случайные процессы являются эффективным инструментом для решения этих задач. В частности, возможность предсказания развития такого процесса в будущем, основываясь на прошлых наблюдениях, имела решающее значение. Независимо друг от друга Колмогоров в Советском Союзе и Винер в Соединенных Штатах получили в этой области важные результаты. Судя по всему, они не имели ни малейшего понятия о работах друг друга вплоть до послевоенных лет.

В двух работах 1941 года [77, 78] Колмогоров рассмотрел стационарные случайные процессы с дискретным временем. Он показал, что класс всех случайных величин с конечными моментами второго порядка образует гильбертово пространство, если скалярное произведение в двух точках определено в виде ковариации соответствующих случайных величин. В таком случае случайный процесс с дискретным временем можно рассматривать как последовательность точек гильбертова пространства, так что теория этого пространства может быть привлечена для изучения таких процессов.

Колмогоров показал, что применение теории гильбертова пространства к стационарным последовательностям случайных величин позволяет без затруднений получить все известные результаты, такие, как разложение Волда и ковариационные характеристики векторного процесса с дискретным временем, описанные в моей работе [22], упоминавшейся в разделе IV. Более того, он воспользовался мощными методами теории функций комплексных переменных для того, чтобы впервые получить необходимое и достаточное условие полной недетерминированности стационарной случайной последовательности (регулярности на языке Колмогорова); им дано также полное решение задачи линейного предсказания методом наименьших квадратов. Его работа была развита Засухиным [127], рассмотревшим стационарный векторный процесс с дискретным временем и получившим для этого случая ряд важных результатов.

Фундаментальное значение работы Колмогорова определяется тем обстоятельством, что он показал, каким образом абстрактная теория гильбертова пространства (как, естественно, и пространств других типов) может быть использована в теории случайных величин и случайных процессов. Это оказало чрезвычайно сильное влияние на дальнейшее развитие последней.

Работа, выполненная в годы войны Винером, была связана с линейным предсказанием и фильтрацией для стационарных процессов как с дискретным, так и непрерывным временем. Для предсказания значения стационарного процесса $x(t)$ с непрерывным временем в момент $t=h>0$, исходя из наблюдений предыдущих значений процесса вплоть до $t=0$, Винер ввел формулу предсказания вида

$$x^*(h)=\int_{-\infty}^{0} x(t)\, dK(t),$$

где K — функция с ограниченной областью изменения, и показал, каким образом можно определить K с тем, чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку предсказания

$$E\,(x^*(h)-x(h))^2.$$

Это — неполное решение математической проблемы линейного предсказания, однако оно имеет важнейшие приложения в целом ряде технических задач. Винер закончил работу, посвященную этой и ряду связанных с ней задач, в 1942 году; в течение нескольких следующих лет она распространялась в мимеографических копиях и была известна под именем «желтой опасности»*, обязанным слож-

* Книга имела желтую суперобложку (см. Н. Винер. Я — математик. М., «Наука», 1967, с. 243).— Примеч. пер.

ности использованного в ней математического аппарата. Работа не была опубликована вплоть до 1949 года, когда появилась в виде монографии [121].

VI. ПОСЛЕВОЕННЫЕ ГОДЫ: 1946—1970

1. Вводные замечания. После того как во время войны все связи были нарушены, постепенно снова появлялась возможность вести научно-исследовательскую работу на интернациональной основе и возобновить контакты с коллегами в других странах. Теперь всем, имеющим отношение к математической теории вероятностей, было ясно, что в течение 25 лет, прошедших между 1920 и 1945 годами, она претерпела радикальные изменения. Если в 1920 году она едва ли заслуживала название математической теории, то в 1945 году вступила в послевоенный мир в качестве хорошо организованного раздела чистой математики, обладающего собственными задачами и методами и постоянно расширяющимися сферами приложения в других науках, так же как и в различных видах практической деятельности. Существовали глубокие взаимосвязи между чисто математической теорией и приложениями; отдельный исследователь уже вряд ли был в состоянии охватить всю эту область целиком.

Послевоенные годы ознаменовались дальнейшим интенсивным развитием в самых различных направлениях. Совершенно ясно, что в воспоминаниях, подобных моим нынешним, еще в меньшей степени, чем для периода до 1945 года, представляется возможным дать полный обзор развития этого послевоенного периода. Поэтому я буду вынужден ограничиться исключительно теми разделами, с которыми сам был более или менее тесно связан, и людьми, с которыми я поддерживал личные контакты.

Я начну с краткого перечня моих контактов с коллегами в годы непосредственно после войны, а затем перейду к обзору последующего развития теории вероятностей, как всегда основываясь на своих личных впечатлениях.

2. Париж, Принстон, Йельский университет, Беркли, 1946—1947. Вскоре после конца войны я получил приглашения в перечисленные университеты. В Париже я должен был прочесть цикл из пяти лекций весной 1946 года: две по статистическому оцениванию и три по стационарным процессам. Затем я занял должность приглашенного профессора в Принстоне (осенний семестр 1946 года), Йеле (весенний семестр 1947 года) и Беркли (очередной летний семестр).

В Париже я с радостью снова встретился с теми, с кем подружился в 1937 году, за исключением юного Деблина, убитого в начале войны. Квартиру Леви нацисты разграбили, уничтожили его книги и рукописи, однако он уже приступил к новой работе по случайным процессам, на основе которой вскоре в 1948 году появилась его интересная книга [84].

Мои парижские лекции по статистическому оцениванию основывались на моей книге по математическим методам (статистики), которая в то время уже печаталась. Я предполагал остановиться на спорных проблемах фишеровской фидуциальной вероятности и неймановских доверительных интервалах (я был всецело на стороне Неймана). Не вполне приятным сюрпризом для меня оказалось присутствие Р. А. Фишера в Париже и посещение им моей лекции. Позже мы встретились вдвоем для обсуждения указанных выше вопросов, которое закончилось более благополучно, чем я предполагал, быть может, частично благодаря тому, что я случайно знал одно место, где можно было хорошо поесть, — их в Париже было не так много год спустя после окончания войны.

В парижских лекциях по стационарным процессам я, кроме прочих проблем, остановился на спектральном представлении ковариационной функции, предложенном Хинчиным (8.1 раздела IV) и моем собственном представлении самого изменяющегося процесса (1.1 раздела V). Оказалось, что Лоэв независимо от меня также нашел последнее. В приложении [90] к книге Леви 1948 года* Лоэв дал обзор результатов важной работы, связанной с этой и рядом родственных задач; впоследствии на его основе появилась глава, вошедшая в замечательную книгу, написанную им в 1955 году [91].

В сентябре 1946 года я предпринял свою первую поездку в Соединенные Штаты, где в Принстоне меня принимал Сэм Уилкс. Я прочел курс лекций по случайным процессам — среди моих слушателей были К. Л. Чжун, Тед Харрис, Дж. А. Хант и Сэм Карлин. Было очень приятно работать с этими умными молодыми людьми. В том году

* В русском переводе книги Леви это приложение исключено в связи с наличием перевода на русский язык книги Лоэва. — Примеч. пер.

Принстонскому университету исполнялось 200 лет, и в число научных конференций, составлявших часть юбилейной программы, входила одна, названная «Проблемы математики». На ней среди множества выдающихся математиков присутствовали мои старые друзья Эйнар Хилл, Уилл Феллер, Ежи Нейман и Норберт Винер, которых мне было очень приятно увидеть снова. Я приобрел также и множество новых знакомых, среди которых были такие выдающиеся вероятностники и статистики, как Дж. Л. Дуб, Харолд Хотеллинг и Марк Кац. На конференции работала секция по математической теории вероятностей, на которой все эти выдающиеся математики сделали интересные сообщения. Я был особенно рад встретиться с Дубом, чья работа по случайным процессам была мне известна и вызывала восхищение. В статье «Задачи теории вероятностей» [25] я дал обзор старых и новых задач, имеющихся в этой области. По приглашению Гертруды Кокс и Харолда Хотеллинга я посетил впервые Чапел-Хилл, проведя там в тот раз лишь несколько дней. В Чапел-Хилле я встретился с П. Л. Су и Хербертом Роббинсом.

На протяжении весеннего семестра в Йеле и летнего в Беркли я продолжал свою работу и чтение лекций по случайным процессам. В Беркли Нейман вел подготовку знаменитой серии Берклиевских симпозиумов по теории вероятностей и математической статистике. Мне доставило большое удовольствие знакомство с группой, занятой этой работой, в частности с Дж. Л. Ходжисом, Эрихом Леманом, Хенри Шеффе и Бетти Скотт (все они теперь хорошо известны благодаря своим значительным научным достижениям).

3. Работа в стокгольмской группе. Во время моего отсутствия в Швеции в 1946 и 1947 годах мое место в Стокгольмском университете занимал Густав Эльфвинг из Хельсинки. Через него и его земляка Кари Карунена наша группа знакомилась с вероятностными исследованиями, проводившимися в Финляндии. В своей диссертации, представленной в 1947 году в Хельсинки [59], Карунен систематически изучил применение теории гильбертова пространства к анализу случайных процессов, продолжив тем самым работу Колмогорова, упоминавшуюся в разделе V. После завершения диссертации, содержавшей важные новые результаты по стохастическим интегралам и стационарным процессам, Карунен провел некоторое время в Стокгольме, работая в нашей группе. В работе 1949 года

[60] он рассмотрел стационарный процесс с непрерывным временем и получил для этого случая результаты, соответствующие полученным Колмогоровым для случая дискретного времени, в том числе разложение Волда и необходимое и достаточное условие абсолютной недетерминированности подобного процесса. Результаты такого же рода были приведены и в работе О. Ханнера [53], также сотрудника нашей группы.

– В работе [26], написанной к Берклиевскому симпозиуму 1950 года, я рассмотрел, опираясь на теорию гильбертова пространства, еще несколько более общих классов случайных процессов. Я привел вывод общего вида спектрального представления, которое для случая стационарного процесса оказалось простейшим из известных к тому времени (сравните с приведенным у Дуба [35]).

Диссертация Ульфа Гренандера [49], члена нашей стокгольмской группы, представленная в 1950 году под названием «Случайные процессы и статистические выводы», явилась подлинно новым словом в этой трудной и важной области. Известно, что позже Гренандер продолжал работу в этом направлении; примером может послужить прекрасная книга «Статистический анализ стационарных временных рядов», выпущенная им в 1957 году в соавторстве с Марри Розенблаттом [50]. Он распространил также свои замечательные результаты на смежные области в книге «Тёплицевы формы и их приложения» [51], выпущенной в 1958 году в соавторстве с Габором Сеге, и в ряде других своих работ. Именно Ульф Гренандер выступил в 1958 году с инициативой издания «Сборника Харальда Крамера» [52], включающего статьи по теории вероятностей и математической статистике, написанные многими моими друзьями. Я был счастлив получить этот символ дружбы. Ульф Гренандер стал моим преемником на посту профессора Стокгольмского университета. Позже он покинул Стокгольм и сейчас работает в Университете Брауна, Провиденс, штат Род-Айленд, США.

Начиная с 1950 года, я вел в университете административную работу, занимавшую значительную часть моего времени вплоть до 1961 года, когда я смог от нее освободиться. Все же мне в это время удалось написать монографию по теории риска, выпущенную в 1955 году [27], наиболее существенную часть которой составляет изучение задачи о разорении применительно к лундбергскому процессу страхового риска (сравните выше, раздел IV). В самом общем случае эта задача приводит к интегральному уравнению Винера — Хопфа, и его обсуждение позволяет получить целый ряд асимптотических результатов, ценных в прикладном отношении. Новые методы, предложенные позже Феллером, позволяют получить часть этих результатов, не прибегая к использованию уравнения Винера — Хопфа.

4. Москва — 1955 год. В мае 1955 года Московский университет отмечал свое двухсотлетие, и я получил приглашение представлять на торжествах Стокгольмский университет. Это было крупное событие, мне же оно дало возможность лично познакомиться с советскими математиками, работы которых в столь сильной степени способствовали развитию теории вероятностей. К сожалению, Хинчин был болен, вскоре он умер, но я встретился с Колмогоровым, который произвел на меня впечатление значительной личности и очень крупного ученого, я имел несколько интересных бесед с ним. Мне было приятно также познакомиться и с другими членами их вероятностной группы. Среди них были Дынкин, приступавший к своей значительной работе по марковским процессам, Гнеденко, написавший вместе с Колмогоровым книгу по предельным задачам (о ней шла речь выше), Линник, начинавший изучать большие отклонения, тему, столь близкую к моей собственной работе 1937 года, Яглом и Розанов, получившие выдающиеся результаты по стационарным процессам, и многие другие. Научная деятельность этой группы была превосходна, и они подготавливали издание нового журнала — «Теория вероятностей и ее применения»; вскоре он завоевал ведущую позицию в этой области в международном масштабе.

В связи с двухсотлетием состоялась и математическая конференция, на которой я прочел лекцию, посвященную своей недавней работе — задаче о разорении. Позже в том же году Колмогоров провел некоторое время в Стокгольме в качестве гостя нашего университета и прочел цикл лекций для нашей группы; они были посвящены предельным теоремам теории вероятностей.

5. Книги по теории вероятностей. До войны имелось очень мало книг по математической теории вероятностей, основанных на современной аксиоматике. Некоторые из них упоминались в предыдущих разделах.

После войны ситуация кардинально изменилась —

учебники и монографии, посвященные отдельным разделам теории, образовали настоящий поток. Я приведу здесь очень краткий обзор, строго ограниченный теми книгами, которые оказали непосредственное влияние на мои собственные исследования. Естественно, поэтому за пределами нашего внимания окажутся многие значительные работы. В частности, обширная литература по марковским процессам и мартингалам будет обойдена молчанием, хотя я полностью сознаю огромную важность этих проблем. Во всех случаях я буду указывать лишь год первого издания книги на языке оригинала.

Первый универсальный послевоенный учебник по теории вероятностей был написан Феллером и появился в 1950 году [45]; в 1966 году вышел его второй том. Для молодого поколения 50-х годов эта книга являлась прекрасным введением в новую важную область научных исследований. В ней была дана основная теория, а также значительное число приложений написана она была в блестящем стиле, присущем ее автору. Второй том содержал ряд новых результатов, а также упрощенные доказательства некоторых известных.

Учебник Лоэва, появившийся в 1955 году [91], отличается проникновением в глубины математического анализа (в его состав вошли главы, посвященные мере и интегрированию). Подробно рассмотрены классические предельные теоремы и их современные расширения на случай взаимозависимости переменных, а также важные классы случайных процессов.

Русский учебник, выпущенный в 1967 году Прохоровым и Розановым [104], является хорошо написанной и полезной книгой, в которой учтены последние результаты; книга характеризует высокий класс работ в нашей области, ведущихся в Советском Союзе.

Появившиеся вскоре после окончания войны монографии Гнеденко и Колмогорова по предельным задачам и Винера по предсказанию и фильтрации временных рядов, так же как книги Гренандера — Розенблатта и Гренандера — Сеге, о которых мы уже говорили.

В 1948 и 1953 годах появились три монографии, посвященные общей теории случайных процессов; две из них, написанные Леви и Дубом, упоминались выше. Третья книга — совместный труд Блан-Лапьера и Форте. Все они являются классическими в этой области. Книга Леви содержит, в частности, подробное рассмотрение броуновского движения на прямой и плоскости. Дуб дал полный обзор теории, в том числе сложных проблем, связанных с теорией меры, а также обширный материал по наиболее важным классам процессов. Книга Блан-Лапьера и Форте заслуживает особенного внимания в связи с подробным обсуждением приложения случайных процессов ко многим важным физическим задачам.

Яглом (1952 г.) написал хорошее введение в теорию стационарных процессов [124]. Подробная монография, посвященная этому важному классу процессов, была опубликована Розановым в 1963 году [110]. В первой части совместной книги Линника и Ибрагимова (1965 г.) содержится исчерпывающий обзор работ Линника и его группы по большим отклонениям для сумм независимых случайных величин, вторая же часть посвящена стационарным процессам [55]. Обе книги (Розанова и Линника — Ибрагимова) содержали новые важные результаты, например обобщение центральной предельной теоремы на случай стационарных процессов. Еще одна монография Розанова (1968 г.) [111], посвященная бесконечномерным гауссовым распределениям, содержит прекрасную главу, в которой рассматривается задача эквивалентности или перпендикулярности нормальных распределений в функциональном пространстве. Четвертый том великолепной работы Гельфанда и Виленкина по обобщенным функциям включает интересную главу, посвященную обобщенным случайным процессам.

И наконец, здесь следует упомянуть автобиографии двух ведущих вероятностников: Норберта Винера, вышедшую в 1956 году [122], и Поля Леви, 1970 года [85]. Обе они содержат массу научного материала, представляющего значительный интерес.

6. Стационарные и связанные с ними случайные процессы. Мои собственные исследования в области теории вероятностей развивались после 1960 года по двум различным направлениям, и сейчас я собираюсь дать краткий обзор работ, посвященных этой тематике (как собственных, так и принадлежащих другим специалистам), не придерживаясь строго хронологического порядка. Начну я с обсуждения работ по стационарным и родственным им случайным процессам, выполненных в 50-х и 60-х годах.

Это направление, начало которому положили работы

Колмогорова и Засухина военного времени, развивалось в конце 40-х годов Каруненом, Ханнером и другими и вскоре привело к получению существенных результатов. Свойства одномерного стационарного процесса при помощи теории гильбертова пространства были обобщены на случай векторных процессов с дискретным и непрерывным временем, а также однородных случайных полей, т. е. процессов с несколькими независимыми параметрами, такими, как две координаты плоскости, четыре координаты пространства — времени, удовлетворяющие некоторому условию, аналогичному стационарности для случая одного параметра.

Спектральные свойства стационарного векторного процесса изучались русскими исследователями, книги которых упоминались в предыдущем разделе, а также в ряде работ Винера и Масани [96]. Колмогоров и Карунен для случая недетерминированного одномерного процесса со спектральной функцией F показали, что спектральные функции чисто недетерминированной и детерминированной составляющих идентичны соответственно абсолютно непрерывной и «скачкообразной» частям F. При изучении соответствующих свойств векторного процесса возникают трудности, связанные с рангом неубывающей спектральной матрицы $\mathbf{F}$, упоминавшейся выше в разделе IV. Если матрица $\mathbf{F}$ (соответствующим образом определенная) обладает максимальным рангом, то разложение, соответствующее одномерному случаю, может быть непосредственно обобщено (как показал Масани [94]), в противном же случае ситуация существенно осложняется.

Сотрудник нашей стокгольмской группы Б. Матерн представил в 1960 году диссертацию по «пространственным вариациям» [97], посвященную однородным случайным ролям в двухмерной плоскости и их приложениям к задаче оценивания в лесоводстве.

Начало еще одной важной линии исследований положила попытка обобщить центральную предельную теорему на случай стационарных процессов. Выше в разделе III я ссылался на работу Бернштейна 1927 года. Он показал, что центральную предельную теорему можно обобщить на случай суммы слабо зависящих друг от друга случайных величин, и ввел метод, позволяющий справляться с такими задачами. В работе 1956 года [109] Розенблатт дал хорошее определение слабой зависимости, которое привело к важной концепции «сильного перемешивания» для случайных процессов. Рассмотрим процесс x_n с дискретным временем, и пусть $M_{a,b}$ — наименьшая полная σ-алгебра событий (ω-множества), относительно которой все x_n, $a \leq n \leq b$ измеримы. В качестве меры зависимости между $M_{-\infty,m}$ и $M_{m+n,\infty}$ Розенблатт ввел верхнюю грань $|P(A \cap B) - P(A)P(B)|$ для всех событий $A \in M_{-\infty,m}$ и $B \in M_{m+n,\infty}$. Если верхняя грань такой величины при всех m стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, то это означает, что зависимость между двумя любыми частями последовательности x_n, далеко отстоящими друг от друга, всегда является слабой; в таком случае говорят о сильно перемешанном процессе. Данное условие является усиленным вариантом обычного условия перемешивания, используемого в эргодической теории. Обобщение на случай непрерывного времени следует непосредственно. Если указанное условие выполнено и вводятся дополнительные условия, связанные со свойствами моментов вида $E(\sum_{m}^{m+n} x_i)^2$ и $E|\sum_{m}^{m+n} x_i|^3$ для больших значений n, то можно показать, что сумма $\sum_{m}^{m+n} x_i$ асимптотически нормальна для любого фиксированного значения m при $n \to \infty$. Для случая, когда последовательность x_n является стационарной в узком смысле, оказалось целесообразным, следуя Ибрагимову, ввести условие «равномерно сильного перемешивания», что упрощает доказательство центральной предельной теоремы и позволяет обобщить закон повторного логарифма. Эти проблемы рассматриваются в книге Линника и Ибрагимова [55] и статьях Волконского и Розанова [117] и Резника [106]. В лекциях, прочитанных в Университете Архуса (1967 г.) и Копенгагенском университете (1969 г.), я дал обзор этих работ, и в некоторых случаях мне удалось получить окончательные результаты.

Все они были получены с помощью метода Бернштейна, предложенного им в работе 1927 года [7]. Для частного случая нормальных процессов может быть получен более точные результаты, как показано, например, в важной работе Колмогорова и Розанова [79].

Работая в Research Triangle Institute of North Carolina (штат Северная Каролина, США) в 1962 году, я занимался задачами, возникшими в навигации космических летательных аппаратов и связанными с экстремальными значениями. Моим помощником был Росс Лидбеттер, молодой новозеландец, работа с которым оказалась очень продуктивной. Наше сотрудничество привело к получению многообещающих результатов, и было решено, что работу стоит продолжить и написать совместную монографию, посвященную рассматривавшимся нами задачам. Составляя план книги, мы вскоре пришли к выводу, что в нее целесообразно включить достаточно подробное изложение общей теории стационарных процессов, сделав упор на свойства их реализаций. Мы, в частности, хотели рассмотреть аналитические свойства реализаций, такие, как непрерывность и дифференцируемость, и исследовать случайные величины, представляющие число пересечений реализацией некоторого фиксированного уровня или кривой на протяжении заданного интервала времени. В основу своей работы мы собирались положить целый ряд более ранних исследований, среди которых я могу назвать работы Беляева [3—6], Булинской [9], Каца и Слепяна [56], Райса [107, 108], Волконского и Розанова [117] и Айлвизейкера [125, 126]. В частности, основополагающее значение для всей этой области имела работа Райса. Для нормального стационарного процесса, удовлетворяющего сильному условию перемешивания, Волконский и Розанов доказали важную теорему о том, что пересечения реализации с очень высоким уровнем аппроксимируются пуассоновским процессом. Мне удалось показать, что это свойство выполняется и при более слабых ограничениях и что из него следуют интересные заключения, касающиеся величины и распределения экстремальных значений реализаций. Соответствующие теоремы были включены в нашу книгу, выпущенную в свет в 1967 году под названием «Стационарные и связанные с ними случайные процессы»*. Многие из полученных нами результатов с тех пор были улучшены другими исследователями, в частности Беляевым, написавшим предисловие к изданию нашей книги на русском языке; С. М. Берманом, выступившим с серией значительных работ по экстремальным значениям, и Г. Линдгреном, который в выполненной в Лундском университете диссертации (1972 г.) привел ряд результатов, касающихся формы и распределения максимумов и минимумов реализаций [88].

* В русском переводе эта книга вышла с несколько измененным названием (смотрите перечень литературы).— Примеч. пер.

7. Структурные задачи для общего класса случайных процессов. Начиная с 1958 года я пытался обобщить некоторые результаты, полученные для стационарных векторных процессов Засухиным, Винером — Масани и другими, как уже отмечалось выше. Было очевидно, что возможности обобщения результатов, касающихся спектральных представлений, очень ограничены. С другой стороны, казалось, что та часть этой проблематики, которую Винер и Масани назвали анализом процессов «во временной области», вполне позволяет получить широкие обобщения для нестационарных случаев.

В докладе, представленном на Берклиевский симпозиум 1960 года, я рассмотрел эти задачи как для случая временной области, так и для случая спектрального анализа. В последнем мне удалось получить лишь предварительные результаты для специального класса процессов. Что касается, однако, анализа во временной области, то здесь мне удалось продвинуться значительно дальше. Оказалось, что в случае процессов с дискретным и непрерывным временем ситуации существенно различны.

Рассмотрим произвольный векторный процесс с дискретным временем, например $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nq})$, где n принимает все отрицательные и положительные целые значения. Пусть компоненты имеют нулевые средние значения и конечные моменты второго порядка. Определим детерминированный и абсолютно недетерминированный процессы стандартным способом. В таком случае без всяких дополнительных условий можно распространить на эту ситуацию разложение Волда, получив

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n,$$

где $\mathbf{u}_n$ — абсолютно недетерминированный, а $\mathbf{v}_n$ — детерминированный процессы, причем $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{v}_n$ взаимно ортогональны. Более того, недетерминированные компоненты $\mathbf{u}_n$ можно представить в виде линейной формы:

$$\mathbf{u}_n = \sum_{i=-\infty}^{n} \mathbf{c}_{ni} \mathbf{z}_i,$$

где $\mathbf{z}_i = (z_{i1}, \ldots, z_{ir_i})$ — вектор-столбец порядка $r_i \leqslant q$

и $\mathbf{c}_{ni}$ — матрица порядка $q \times r_i$; компоненты $\mathbf{z}_{ij}$ взаимно ортогональны для всех i и j.

Для случая векторного процесса $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_q(t))$ с непрерывным временем t существует аналогичное разложение

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$$

с абсолютно недетерминированной $\mathbf{u}(t)$ и детерминированной $\mathbf{v}(t)$ компонентами, являющимися взаимно ортогональными. В этом случае, однако, представление $\mathbf{u}(t)$ оказывается более сложным. Если допустить существование среднеквадратичных пределов $\mathbf{u}(t+0)$ и $\mathbf{u}(t-0)$ для всех t, то можно показать, что гильбертово пространство, натянутое на все компоненты $\mathbf{u}(t)$, сепарабельно. В таком случае, опираясь на геометрию гильбертова пространства, можно показать, что для всех t

$$\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(t, v)\, d\mathbf{z}(v),$$

где $\mathbf{z}(v) = (z_1(v), \ldots, z\ (v))$ — вектор-столбец порядка N, компонентами которого служат взаимно ортогональные случайные процессы с ортогональными приращениями, и $\mathbf{G}(t, v)$ — неслучайная матрица порядка $q \times N$. Число N однозначно определяется заданным процессом $\mathbf{x}(t)$; оно может принимать любое целое положительное значение либо быть равным ∞. Таким образом, если в случае дискретного времени порядок векторов $\mathbf{z}_i$ самое большее может принимать значение q порядка заданного векторного процесса, то процесс $\mathbf{z}(v)$, возникающий в непрерывном случае, может иметь любой порядок, даже бесконечный.

Как в случае дискретного, так и непрерывного времени представление недетерминированной компоненты $\mathbf{u}_n$ или $\mathbf{u}(t)$ немедленно приводит к решению в явном виде задачи линейного предсказания методом наименьших квадратов. Свойства этого представления я рассмотрел еще в нескольких статьях [29, 31, 32]. Важно было бы уметь определять многообразие N, соответствующее заданному процессу $\mathbf{x}(t)$, и мне удалось внести некоторый вклад в решение этой задачи, полное решение которой, однако, до сих пор как будто неизвестно.

Представление $u(t)$ для случая нормального процесса было предложено Хида [54] в то же время, когда я выступил с докладом [28] на Берклиевском симпозиуме 1960-го года. В дальнейшем интересные результаты были получены

Каллианпуром и Мандрекаром [57, 58] и совсем недавно — Розановым [112]. Ряд работ, посвященных этой и родственным задачам, содержится в сборнике, вышедшем под редакцией Эфримайдиса и Томаса [39].

8. Путешествия и работа: 1961—1970. В начале лета 1961 года я подал в отставку со своего поста в университетской администрации и перешел на положение независимого ученого. На Парижском конгрессе Международного института статистики (International Statistical Institute) я встретился с Гертрудой Кокс, которая пригласила меня приехать поработать в Research Triangle Institute (штат Северная Каролина, США). Я проводил там по нескольку месяцев в 1962, 1963 и 1965 годах. Кроме того, мною исполнялись обязанности приглашенного профессора в 1963 году в Колумбийском университете, в 1965 году — в Йеле и в 1966 году — в Беркли. В предыдущем разделе я уже говорил о работах по случайным процессам, которыми я занимался в эти годы. Во всех научных центрах я работал вместе с друзьями — старыми и новыми.

Летом 1962 года в Стокгольме проходил международный математический конгресс. Мы с женой устроили у себя в доме «вероятностный» завтрак, на котором присутствовали мои выдающиеся друзья, среди них Дуб, Хант, Ито, Каппос, Колмогоров, Линник, Масани, Реньи, Розенблатт, Такач и Урбаник.

На Всесоюзную конференцию по теории вероятностей и математической статистике, состоявшуюся в Тбилиси в октябре 1963 года, я приехал прямо из Соединенных Штатов. Программа конференции была прекрасно составлена; она включала, в частности, лекции русских вероятностников, работы которых уже упоминались выше, а также доклады молодых ученых, высокий научный уровень и актуальность которых произвели очень сильное впечатление. Колмогоров прочел лекцию о применении вероятностных методов к анализу поэзии, Яглом, Ибрагимов и Розанов докладывали о различных аспектах теории случайных процессов, а Линник — о статистических критериях. Мой доклад был посвящен случайным процессам как кривым в гильбертовом пространстве и содержал некоторые результаты, касающиеся многообразий, о которых шла речь в предыдущем разделе. После конференции мне была предоставлена также возможность прочесть лекции в Москве и Ленинграде.

В 1967 году я присутствовал на конференции по статистическим экстремумам в Фару (Португалия); в программе конференции были хорошо представлены и теоретические и прикладные аспекты проблемы. В дальнейшем я исполнял обязанности приглашенного профессора в Университете Архуса (Дания), а в 1969 году — в Копенгагенском университете. В 1970 году я получил приглашение от Джона Тьюки прочесть первую Лекцию С. С. Уилкса [32] на торжественном открытии нового корпуса Fine Hall в Принстонском университете. Во время этой поездки мы с женой посетили Чапел-Хилл, Принстон, Провиденс и Сторрс и имели удовольствие снова увидеть работающих там друзей.

И на этом моменте, на 70-м году, я заканчиваю свои воспоминания о развитии математической теории вероятностей на протяжении половины столетия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arley N. (1943). Stochastic processes and cosmic radiation. Ph. D. Thesis, Copenhagen.
2. Bachelier L. (1900). Théorie de la spéculation. *Ann. École Norm. Sup. 17*, 21—86.
3. Беляев Ю. К. Аналитические случайные процессы. — «Теория вероятностей и ее применения». 1959, т. 4, вып. 4, 437—444 с.
4. Беляев Ю. В. Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов. — «Теория вероятностей и ее применения»», 1960, т. 5, вып. I, 128—131 с.
5. Beljaev Yu. K. (1960). Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.* 23—33, Univ. of California Press.
6. Беляев Ю. В. О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом.— «Теория вероятностей и ее применения» 1966, т. II, вып. I, 120—128 с.
7. Bernstein S. N. (1927). Sur l'extension du théorème limite du cálcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. *Math. Ann. 97*, 1—59.

Русский перевод: Бернштейн С. Н. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин.— «Успехи математических наук», 1944, вып. 10, 65—114 с.

8. Brockmeyer E., Halstrøm H. L. and Jensen Arne (1948). The life and works of A. K. Erlang. *Trans. Danish Acad. Tech. Sci.* no. 2, 277 pages.
9. Булинская Е. В. О среднем числе пересечений некоторого уровня стационарным гауссовским процессом.— «Теория вероятностей и ее применения», 1961, т. 6, вып. 4, 474—478 с.
10. Cantelli F. P. (1933). Considerazione sulla legge uniforme dei grandi numeri. *Giorn. Ist. Ital. Attuari 4*, no. 3.
11. Charlier C. V. L. (1905). Ueber das Fehlergesetz. *Ark. Mat. Astr. Fys. 2*, no. 8.
12. Cramér H. (1919). Bidrag till utjämningsförsäkringens teori. Insur. Inspect. Sthlm.
13. Cramér H. (1923). Das Gesetz von Gauss und die Theorie des Risikos. *Skand. Aktuarietidskr.* 209—237.
14. Cramér H. (1925). On some classes of series used in mathematical statistics. *Sixth Scand. Math. Congr. Copenhagen.* 399—425.
15. Cramér H. (1926). Sannolikhetskalkylen i den vetenskapliga litteraturen. *Nordisk. Stat. Tidskr. 5*, 1—32.
16. Cramér H. (1928). On the composition of elementary errors. *Skand. Aktuarietidskr.* 13—74, 141—180.
17. Cramér H. (1934) Su un teorema relativo alla legge uniforme dei grandi numeri. *Giorn. Ist. ètal. Attuari 5*, no. 1.
18. Cramér H. (1936). Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. *Math. Z. 41*, 405—414.
19. Cramér H. (1937). Random Variables and Probability Distributions. *Cambridge Tracts in Math. 36*.

Русский перевод: Крамéр Гаральд*. Случайные величины и распределения вероятностей. Пер. с англ. А. М. Яглома. Под ред. акад. А. Н. Колмогорова. М., ИЛ, 1947, 144 с.
20. Cramér H. (1938). Sur un nouveau théorème — limite de la théorie des probalités. *Actualités Sci. Indust. 736*, 5—23.
Русский перевод: Крамéр Х. Об одной новой предельной теореме вероятностей — «Успехи математических наук», 1944, вып. 10, 166—178 с.
21. Cramér H. (1939). On the representation of a function by certain Fourier integrals. *Trans. Amer. Math. Soc. 46*, 191—201.
22. Cramér H. (1940). On the theory of stationary random processes. *Ann. of Math. 41*, 215—230.
23. Cramér H. (1942). On harmonic analysis in certain functional spaces. *Ark. Mat. Astr. Fys. 28B*, no. 12.
24. Cramér H. (1945). Mathematical Methods of Statistics. Almquist and Wiksells, Uppsala. (1946). Princeton Univ. Press.
Русский перевод: Крамéр Гаральд. Математические методы статистики. Пер. с англ. А. С. Монина и А. А. Петрова. Под ред. акад. А. Н. Колмогорова. М., ИЛ, 1948, 632 с. Изд. 2-е. М., «Мир», 1975, 648 с.
25. Cramér H. (1947). Problems in probability theory. *Ann. Math. Statist. 18*, 165—193.
26. Cramér H. (1950). A contribution to the theory of stochastic processes. *Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.* 329—339, Univ. of California Press.
27. Cramér H. (1955). Collective risk theory. Skandia Insurance Co., Stockholm.
28. Cramér H. (1960). On some classes of non-stationary stochastic processes. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. 2*, 57—77, Univ. of California Press.
29. Cramér H. (1961). On the structure of purely non-deterministic stochastic processes. *Ark. Mat. 4*, 249—266.
30. Cramér H. (1963). On asymptotic expansions for sums of independent random variables with a limiting stable distribution. *Sankhyā Ser. A 25*, 13—24.
31. Крамéр Гаральд. Случайные процессы как кривые в гильбертовом пространстве.— «Теория вероятностей и ее применения», 1964, т. 9, вып. 2, 193—204 с.
32. Cramér H. (1971). Structural and statistical problems for a class of stochastic processes. S. S. Wilks Lecture, Princeton Univ. Press.
33. Cramér H. (1972). On the history of certain expansion used in mathematical statistics. *Biometrika, 59*, 205—207.
34. Cramér H. and Leadbetter M. R. (1967). Stationary and Related Stochastic Processes. Wiley, New York.
Русский перевод: Крамер Г. и Лидбеттер. М. Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения. Пер. с англ. Под ред. Ю. К. Беляева. М., «Мир», 1969, 398 с.

* Здесь и далее в списке литературы имя Крамéра приведено в соответствии с тем, как оно дано в изданиях, на которые делается ссылка,— Гаральд. В настоящее время общепринятым является — Харальд. См.: БЭС, изд. 3, т. 13.— Прим. пер.

35. Cramér H. and Wold H. (1936). Some theorems on distribution functions. *J. London Math. Soc. 11*, 290—294.
36. Doob J. L. (1953). Stochastic Processes. Wiley, New York.
Русский перевод: Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. Пер. с англ. Под ред. А. М. Яглома. М., ИЛ, 1956, 606 с.
37. Edgeworth F. Y. (1905). The law of error. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 20*. 36—141.
38. Einstein A. (1906). Zur Theorie der Brownschen Bewegung. *Ann. Physics* IV, *19*, 371—381.
Русский перевод: Эйнштейн А. К теории броуновского движения.— Эйнштейн А. Собрания научных трудов в 4-х томах, т. III. Работы по кинетической теории, теории излучения и основам квантовой механики. 1901—1955. М., «Наука», 1966, 118—127 с.
39. Ephremides A. and Thomas J. B. (eds.) (1973). Random Processes. Dowden, Hutchinson, Ross, Stroudsburg.
40. Esseen C. G. (1945). Fourier analysis of distribution functions. *Acta Math.* 77, 1—125.
41. Feller W. (1935, 1937). Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Z. 40*, 521—559; *42*, 301—312.
42. Feller W. (1936). Zur Theorie der stochastischen Prozesse. *Math. Ann. 113*, 113—160.
Русский перевод: Феллер В. К теории стохастических процессов (Теоремы существования и единственности).— «Успехи математических наук», вып. 5, 1938, 57—96 с.
43. Feller W. (1940). On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes. *Trans. Amer. Math. Soc. 48*, 488—575.
44. Feller W. (1943). The general form of the so-called law of the iterated logarithm. *Trans. Amer. Math. Soc. 54*, 373—402.
45. Feller W. (1950, 1966). An introduction to Probability Theory and Its Applications 1 and 2. Wiley, New York.
Русский перевод: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения (дискретные распределения). Пер. с англ. Под ред. Е. Б. Дынкина. Предисловие акад. А. Н. Колмогорова. М., ИЛ, 1952, 428 с. Изд. 2-е. М., «Мир», 1964. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд. 2-е, т. 1, 2. М., «Мир», 1967.
46. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961, 472 с.
47. Гнеденко Б. В. К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин. Изв. Акад. наук СССР — ОМЕН, 1939. Серия матем., № 2, 181—232 с.
48. Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.—Л., Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1949, 264 с.
49. Grenander U. (1950). Stochastic processes and statistical inference. *Ark. Mat. 1*, 195—277.
Русский перевод: Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. Пер. с англ. А. М. Яглома. М., ИЛ, 1961, 168 с.
50. Grenander U. and Rosenblatt M. (1956). Statis-

tical Analysis of Stationary Time Series. Almquist and Wiksells. Stockholm.
51. Grenander U. and Szegö G. (1958). Toepitz Forms and Their Applications. Univ. of California Press.
Русский перевод: Гренандер У. и Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения. М., ИЛ, 1961.
52. Grenander U. (ed.) (1959). Probability and statistics, the Harald Cramér Volume. Almquist and Wiksells, Stockholm and Wiley, New York.
53. Hanner O. (1949). Deterministic and nondeterministic stationary random processes. *Ark. Mat.* 1, 161—177.
54. Hida T. (1960). Canonical representations of Gaussian processes and their applications. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A 33*, 109—155.
55. Ибрагимов И. А. и Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., «Наука», 1965, 524 с.
56. Kac M. and Slepian D. (1959). Large excursions of Gaussian processes. *Ann. Math. Statist. 30*, 1215—1228.
57. Kallianpur G. and Mandrekar V. (1970) On the connections between multiplicity theory and O. Hanner's time domain analysis of weakly stationary stochastic processes. *Essays in Probability and Statistics*, 385—396. Vuiv. of North Carolina Press.
58. Каллианпур Г. и Мандрекар В. Теория кратности и теория представления чисто недетерминистских случайных процессов.— «Теория вероятностей и ее применения», 1965, т. 10, вып. 4, 614—644 с.
59. Karhunen K. (1947). Ueber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 37*, 1—79.
60. Karhunen K. (1949). Ueber die Struktur stationärer zufälliger Funktionen. *Ark. Mat.* 1, 141—160.
61. Keynes J. M. (1921). A Treatise on Probability. Macmillan, London.
62. Khintchine A. Ya. (1923). Ueber dyadiche Brüche. *Math. Z. 18*, 109—116.
63. Khintchine A. Ya. (1933). Zur mathematischen Begründung des statistischen Mechanik. *Z. Angew. Math. Mech. 13*, 101—103.
64. Khintchine A. Ya. (1933). Asymptotische Gesetze der Warscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, Berlin.
Русский перевод: Хинчин А. Я. Асимптотические законы теории вероятностей. Пер. с нем. Н. С. Пискунова и А. Н. Эрастовой. М.—Л., ОНТИ, 1936. («Математика в монографиях». Под ред. акад. И. М. Виноградова, проф. А. Н. Колмогорова, проф. Л. А. Люстерника, проф. А. И. Плескера, Кн. III).
65. Khintchine A. Ya. (1934). Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. *Math. Ann. 109*, 604—615.
Русский перевод: Хинчин А. Я. Теория корреляции стационар-

ных стохастических процессов.— «Успехи математических наук», 1938, вып. 5, 42—51 с.
66. Khintchine A. Ya. (1936). Sul dominio di attrazione della legge di Gauss. Giorn. *Ist. Ital. Attuari 7*, 3—18.
67, 68. Хинчин А. Я. Новый вывод одной формулы П. Леви. Об арифметике законов распределения. М., ОНТИ, 1937, 17 с.— Бюллетень Моск. гос. ун-та. Секция А, т. I «Математика и механика». Под ред. В. В. Голубева, А. Н. Колмогорова и Л. А. Тумаркина, вып. I.
69. Khintchine A. Ya. (1937) Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze. *Математический сборник, 44*, 79—120.
70. Khintchine A. Ya. und Kolmogorov A. N. (1925). Ueber Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. *Математический сборник, 32*, 668—677.
71. Kolmogorov A. N. (1928). Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen. *Math. Ann. 99*, 309—319.
72. Kolmogorov A. N. (1929). Ueber das Gesetz des iterierten Logarithmus. *Math. Ann. 101*, 126—135.
73. Kolmogorov A. N. (1931). Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann. 104*, 415—458.
Русский перевод: Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей.— «Успехи математических наук», 1938, вып. 5, 5—41 с.
74. Kolmogorov A. N. (1932). Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo (un problema di B. de Finetti). *R. Accad. Lincei 15*, 805—808, 866—869.
75. Kolmogorov A. N. (1933). Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, Berlin.
На русск. яз.: Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. Изд. 2-е. М.—Л., 1936.
76. Колмогоров А. Н. Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина.— «Успехи математических наук», 1938, вып. 5, 51—56 с.
77. Колмогоров А. Н. Стационарные последовательности в гильбертовском пространстве. М., Бюллетень Моск. гос. ун-та. Секция А, 2, № 6; 1941, 1—40 с.
78. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей.—«Известия Академии наук СССР», 1941. Серия матем., вып. 5, 3—14 с.
79. Колмогоров А. Н., Розанов Ю. А. Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса.— «Теория вероятностей и ее применения», 1960, т. 5, № 2, 222—227 с.
80. Lévy P. (1925). Calcul des Probabilités. Gauthier — Villars, Paris.
81. Lévy P. (1934). Sur les intégrales dont les éléments sont des variabels aléatoires indépendantes. *Ann. Ecole. Norm. Sup. Pisa (2)*, *3*, 337—366.
82. Lévy P. (1935). Propriétés asymptotiques des sommes de variab-

les aléatoires indépendantes ou enchainées. *J. Math. Pures Appl. (9)*, *14*, 347—402.
83. Lévy P. (1937). Théorie de L' Addition des Variables Aléatoires. Gauthier-Villars, Paris.
84. Lévy P. (1948). Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Gauthier-Villars, Paris.
Русский перевод: Леви Поль. Статистические процессы и броуновское движение. Пер. с франц. Под ред. Н. Н. Ченцова. М., «Наука», 1972, 375 с.
85. Lévy P. (1970). Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Blanchard, Paris.
86. Ляпунов А. М. Новая форма теоремы о пределе вероятности.—В сб.: А. М. Ляпунов. Избранные труды. Под ред. В. И. Смирнова. М., Изд-во Академии наук СССР, 1948, 219—250 с.
87. Lindeberg J. W. (1922). Eine neue Herleitung des Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Z. 15*, 211—225.
88. Lindgren G. (1972). On wave-forms in normal random processes. Thesis, Lund.
89. Линник Ю. В. см. Ибрагимов И. А. и Линник Ю. В.
90. Loève M. (1948). Fonctions aléatoires du second ordre. Note à Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien (84)*, 299—352. Paris.
91. Loève M. (1955). Probalibility Theory. Van Nostrand, Princeton. (3rd ed., 1963.)
Русский перевод: Лоэв Мишель. Теория вероятностей. Пер. с англ. Б. А. Севастьянова. Под ред. Ю. А. Прохорова. М., ИЛ, 1962, 719 с.
92. Lundberg F. (1903). Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Återförsäkring av kollektivrisker. Thesis, Uppsala.
93. Lundberg O. (1940). On random processes and their application to sickness and accident statistics. Thesis. Stockholm.
94. Masani P. (1959). Cramér's theorem on monotone matrix-valued functions and the Wold decomposition. *Probability and Statistics: The Harald Cramér Volume* (Ulf Grenander, ed.) 175—189. Almquist and Wiksell, Stockholm; Wiley, New York.
95. Masani P. (1966). Wiener's contributions to generalized harmonic analysis, prediction theory and filter theory, Norbert Wiener 1894—1964. *Bull. Amer. Math. Soc. 72*, 73—125.
96. Masani P. and Wiener N. (1957). The prediction theory of multivariate stochastic processes. *Acta Math. 98*, 111—150, and (1958) 99, 93—137.
97. Matérn B. (1960). Spatial variation. *Swed. Forestry Res. Inst. 49*, 1—144.
98. von Mises R. (1919). Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Z. 5*, 52—99.
99. von Mises R. (1928). Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Springer, Wien.

Русский перевод: Мизес Рихард. Вероятность и статистика. Пер. с нем. Под ред. проф. А. Я. Хинчина. М.—Л., Гос. изд-во, 1930, 269 с.
100. de Moivre A. (1733). Miscellanea analytica. Second supplement. London.
101. Neyman J. (1937). Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. *Philos. Trans. Roy. Soc. London 236*, 333—380.
102. Neyman J. (1942). Basic ideas and some recent results of the theory of testing statistical hypothesis. *J. Roy. Statist. Soc.* (N. S.) *105*, 292—327.
103. Pólya G. (1920). Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. *Math. Z. 8*, 171—181.
104. Прохоров Ю. В. и Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., «Наука», 1967, 495 с. Изд. 2-е, М., «Наука», 1973.
105. Райков Д. А. О разложении законов Гаусса и Пуассона.— «Известия Академии наук СССР», 1938, Математическая серия, 2, 91—124 с.
106. Резник М. Х. Закон повторного логарифма для некоторых классов стационарных процессов.— «Теория вероятностей и ее применения», 1968, т. 13, вып. 4, 642—656 с.
107. Rice S. O. (1945). Mathematical analysis of random noise. *Bell System Tech. J. 24*, 46—156.
108. Rice S. O. (1958). Distribution of the duration of fades in radio transmission. *Bell System Tech. J. 37*, 581—635.
109. Rosenblatt M. (1956). A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proc. Nat. Acad. Sci. 42*, 43—47.
110. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963, 28 с. (Серия «Теория вероятностей и матем. статистика»).
111. Розанов Ю. А. Гауссовские бесконечномерные распределения. М., «Наука», 1968, 136 с. (АН СССР.— Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. 108).
112. Розанов Ю. А. Теория обновляющих процессов. М., «Наука», 1974, 128 с. (Серия «Теория вероятностей и математ. статистика»).
113. Rutherford E. and Geiger H. (1908). An electrical method of counting the number of particles from radioactive substances. *Proc. Roy. Soc. A 81*, 141—161.
Русский перевод: Резерфорд Э., Гейгер Г. Электрический метод счета α-частиц, испускаемых радиоактивными веществами.— В кн.: Эрнест Резерфорд. Избранные научные труды. Строение атома и искусственное превращение элементов. М., «Наука», 1972, 123—142 с.
114. Segerdahl C. O. (1939). On homogeneous random processes and collective risk theory. Thesis, Stockholm.
115. Tchebychev P. L. (1867). On mean values. *J. Math. Pures Appl. 12*, 177—184.
Русский перевод: Чебышев П. Л. О средних величинах.— «Математический сборник», т. II, 1867. Чебышев П. Л. Избранные труды. Изд-во Акад. наук СССР, М., 1955, 202—210 с.

116. Tchebychev P. L. (1890). Sur deux théorèmes relatifs aux Probabilitiés. *Acta Math. 14*, 305—315.
Русский перевод: Чебышев П. Л. О двух теоремах относительно вероятностей. Пояснения к 55-му тому Записок Императорской Академии наук, 1887, № 6, 202—210 с.
117. Волконский В. А., Розанов Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций I, II.—«Теория вероятностей и ее применения», т. 4, № 2, 1959, 186—207 с.; т. 6, № 2, 1961, 200—215 с.
118. Wiener N. (1923). Differential space. *J. Math. and Phys. 2*, 131—174.
119. Wiener N. (1930). Generalized harmonic analysis. *Acta Math. 55*, 117—258.
120. Wiener N. (1934). Fourier transforms in the complex domain (with R. Paley). *Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 19.*
Русский перевод: Винер Норберт и Пэли Раймонд. Преобразование Фурье в комплексной области. Пер. с англ. Ф. В. Широкова. М., «Наука», 1964, 207 с.
121. Wiener N. (1949). Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. With engineering applications. Wiley, New York.
122. Wiener N. (1956). I Am a Mathematician. The Later Life of a Prodigy. Doubleday, New York.
Русский перевод: Винер Норберт. Я — математик. Сокращенный перевод с англ. Ю. С. Родман. М., «Наука», 1964.
123. Wold H. (1938). A study in the analysis of stationary time series. Thesis, Stockholm.
124. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций.— «Успехи математических наук», 1952, т. 7, № 5 (51), 3—168 с.
125. Ylvisaker N. D. (1965). The expected number of zeros of a stationary Gaussian process. *Ann. Math. Statist. 36*, 1043—1046.
126. Ylvisaker N. D. (1966). On a theorem of Cramér and Leadbetter. *Ann. Math. Statist. 37*, 682—685.
127. Засухин В. Н. К теории многомерных стационарных случайных процессов.— «Доклады Академии наук СССР», 1941, т. 33, 435—437 с.