ПРОБЛЕМА ФИНАНСОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ: ЧТО МОЖЕТ ПОДСКАЗАТЬ СТРАХОВЩИКУ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ?[†]

Всеволод Малиновский

Если руководство большинства производственных предприятий знает, когда и сколько нужно платить своим деловым партнерам, или в каком размере и в какие сроки следует погасить кредит и уплатить по нему проценты, то страховщику сроки и размеры своих обязательств по необходимости известны в вероятностных терминах, что часто интерпретируется попросту как информация с весьма большой степенью допуска.

Хорошо известно[1], что к основным факторам успешной деятельности страховой компании относятся

- достаточный собственный капитал,
- ограничение единичного риска (перестрахование),
- тарифная политика,

которые зависят от страховщика и, добавим,

- удачная страховая конъюнктура (в смысле, уточняемом ниже),

на которую нельзя оказывать прямого влияния, но которая может и должна учитываться при анализе страховой политики.

Ключевым вопросом к пониманию работы страховой компании является вопрос: как из взаимодействия этих факторов складывается «разорение» или наоборот, «неразорение» страховой компании (точнее, как зависит от них вероятность этих событий)? Сразу заметим, что под «разорением» будет пониматься не столько собственно банкротство компании, сколько событие, состояще в том, что капитал компании в какой–либо момент ее деятельности становится меньше некоторого заранее заданного уровня.

При изучении этого вопроса, конечно, подразумевается, что страховая компания находится в некоторой устойчивой среде; при этом все остальные параметры, о которых пойдет речь ниже (в определенном смысле — с точностью до их распределений), известны и, что особенно важно, стабильны.

Страховщик берет на себя обязательства на будущее, руководствуясь прошлым опытом. Выполнение этих обязательств должно произойти либо через достаточно большой промежуток времени (при страховании на дожитие или

[†]Заметка опубликована в журнале «Страховое дело», № 11, (1996).

[1]См., например, В. А. Сухов Государственное регулирование финансовой устойчивости страховщиков. АНКИЛ: Москва, 1995.

пенсионном страховании), либо их срок и размер неизвестны (страхование от несчастных случаев, автотранспортных средств и т.п.). Поэтому предсказание по необходимости будет высказано в терминах теории вероятностей и правильная интерпретация самого точного, обоснованного и авторитетного вероятностного предсказания потребует определенных специальных знаний.

Теоретические прогнозы важны страховщику для сохранения им способности выполнять обязательства при любом неблагоприятном изменении ситуации, при самом худшем для страховщика стечении обстоятельств. В самом деле, имея количественную оценку влияния начального собственного капитала, или уровня перестрахования, или размера тарифов, на конечный результат, каковым в данном случае является вероятность разорения, страховщик сознательно будет строить систему мер, призванных исправить ситуацию, если возникли подозрения о неблагоприятности развития страхового процесса.

Если риск нераспознаваем (т.е., если нельзя точно определить вероятность его наступления и размер), то никакие технические действия страховщика или решения государственных органов не способны обеспечить его покрытие. Однако, даже если риск (будем понимать под этим как срок, так и размер страховых выплат) может быть достаточно точно описан и вполне согласуется с прошлым опытом, если страховая компания находится в устойчивой среде и если все параметры страхового процесса стабильны, если единичный риск ограничен перестрахованием — одним словом, если страховщик выполнил все технические действия, направленные на достижение максимальной надежности — неточный или неполный учет внешних факторов может привести к качественно неверным предсказаниям со всеми вытекающими отсюда последствиями для страховой компании.

Цель настоящей заметки — еще раз обратить внимание на одну из наиболее известных математических моделей деятельности страховой компании и продемонстрировать зависимость конечного ответа — величины вероятности разорения — от таких внешних факторов, как *распределение* размера страховых выплат и *распределение* числа страховых случаев за единицу времени.

«Классическая» модель Лундберга–Крамера, называемая также коллективной моделью теории риска, формализует известное словесное описание «глобальной» деятельности страховой компании. Ее основой является процесс *рискового резерва* $R(t)$, или, говоря грубо, размер капитала компании в каждый момент времени t, начиная с начального момента $t = 0$. То, что все индивидуальные страховые договоры, заключенные компанией, суммируются и рассматривается «глобальное» поведение компании, конечно, является огрублением, но это вполне допустимо для первоначальной ориентации.

Три основные составляющие процесса $R(t)$ — это

- *размер начального капитала* $R(0) = u$,
- *доходы*, связанные с премиальными выплатами, которые определяются принятой системой *тарифов*, и
- *расходы* на страховые выплаты; именно эти выплаты отражают случайную природу страхового процесса.

Во избежание усложнений, которые выходят за рамки этой заметки, мы будем предполагать, что доходы растут линейно с положительной постоянной интенсивностью c, выплаты производятся сразу же после наступления страхового случая, моменты времени между наступлениями страховых случаев и размеры страховых выплат независимы и величина их «стабильна». Наконец, мы не будем принимать в расчет инфляцию и доходы от инвестирования свободных средств, хотя соответствующий математический аппарат довольно хорошо разработан.

Обращаясь к математическим терминам, то же самое можно сказать так: интервалы между страховыми случаями и размеры страховых выплат являются случайными величинами (сл.в.) T_i, $i = 1, 2, \ldots$, и Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, соответственно, причем эти сл.в. независимы и одинаково распределены. Очевидно, что n–ый страховой случай наступит в момент $\sum_{i=1}^{n} T_i$ и число страховых случаев, произошедших за время $t \geqslant 0$, будет выражаться формулой $N(t) = \max\{n > 0\ \sum_{i=1}^{n} T_i \leqslant t\}$. Суммарные расходы, понесенные страховщиком на покрытие первых n страховых случаев, составляют $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ единиц, так что расходы страховщика на выплаты до момента t составят $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ единиц. С другой стороны, кроме начального капитала u, страховщик получит за время t премиальные взносы в размере ct единиц.

Итак, образованная описанными выше расходами и доходами, величина рискового резерва в момент времени t будет равна $R(t) = u+ct-X(t)$. Под «разорением» страховой компании в рамках этой модели понимается исчерпание средств в результате превышения суммарных страховых выплат над средствами, равными сумме первоначального капитала и средствами, поступившими от премиальных взносов, так что будем говорить, что «разорение» происходит в некоторый момент времени s, если $R(s) < 0$.

Вероятность наступления хотя бы одного «разорения» в промежутке времени $(0, t]$ будет поэтому выражаться формулой

$$\psi(t, u) = \mathbf{P}\{\inf_{0<s\leqslant t} R(s) < 0\}.$$

Интуитивно — поскольку мы предполагаем «стабильное» во времени развитие событий — «разорение» в конце концов обязательно произойдет, если размер выплат по страховому случаю не покрывается накоплением страховых взносов, что при фиксированной интенсивности c всецело зависит от продолжительности интервала между страховыми случаями: чем он длиннее, тем больше средств удастся накопить на покрытие очередного страхового случая. Здесь не спасет даже и очень большой размер начального капитала u. В конце концов (кстати, интересный вопрос — как скоро?) он будет неизбежно исчерпан.

Поэтому наиболее интересной представляется ситуация, когда «в среднем» размер выплат по страховому случаю покрывается накоплением страховых взносов. Математически это выражается неравенством $\mathbf{E}Y_1 < c\mathbf{E}T_1$, в котором символ $\mathbf{E}\xi$, как обычно, обозначает математическое ожидание сл.в. ξ. Только в этом случае страховой процесс «доходен». Заметим попутно, что сказанное не означает, что в «недоходной», «разоряющейся» компании не может быть кратковременного, случайного, превышения доходов над расходами — беда именно в том, что такие светлые периоды непременно краткосрочны и погоды не делают.

Итак, пусть стратегия компании (тарифная политика и пр.) выбраны разумно и разорение может случиться лишь вследствие неблагоприятного стечения внешних обстоятельств, например, при появлении ряда очень коротких промежутков T_i и одновременно необычно больших страховых выплат Y_i по ним. В известном смысле, т.е. считая, что качественные изменения в страховой среде невозможны (не растет скачком инфляция, не происходит, скажем, значительных сезонных изменений и т.д. — хотя все это можно изначально учитывать в более сложной модели), именно эта ситуация может быть описана как «самое худшее для страховщика стечение обстоятельств». Заметим попутно, что такие события *нельзя прогнозировать*, обладая недостаточной статистикой, например, зная лишь количество страховых случаев за, скажем, квартал, хотя подчас страховая статистика собирается и хранится именно в этой «усеченной», «ущербной» форме.

Первое соображение, которое в значительной мере позволит избежать описанной выше опасности — уменьшить вероятность появления «больших» страховых выплат какими — либо техническими действиями, из которых наиболее известным (но далеко не единственным) является *перестрахование.* Полезно понимать, как ведет себя вероятность разорения при большой вероятности появления большой страховой выплаты. Ответ на этот вопрос дает следующий результат[2]:

$$\psi(+\infty, u) \approx -\frac{1}{\mathbf{E}Y_1 - c\mathbf{E}T_1}\int_u^\infty \mathbf{P}(Y_1 > x)dx$$

при достаточно больших значениях u и некоторых тонких ограничениях на распределение сл.в. Y_1, которые на практике почти всегда выполняются, а поэтому упоминаться здесь не будут. Говоря грубо, вероятность $\psi(+\infty, u)$ того, что разорение произойдет в неограниченном временном интервале, пропорциональна вероятности того, что максимальная страховая выплата превзойдет размер начального капитала.

Теперь, после сделанных оговорок, мы можем перейти к ключевому вопросу, а именно к вопросу о том, как складывается «разорение» из взаимодействия размера собственного капитала, ограниченного (перестрахованного) единичного риска, тарифной политики и страховой конъюнктуры в силу *случайных, не зависящих от страховщика* обстоятельств.

Основой для ответа является следующая аппроксимационная формула: при достаточно больших значениях u

$$\psi(t, u) \approx Ce^{-\varkappa u}\Phi_{(mu, D^2u)}(t). \tag{1}$$

Константа $\varkappa > 0$, называемая показателем Лундберга, является решением уравнения

$$\mathbf{E}\exp(\varkappa(Y_1 - cT_1)) = 1, \tag{2}$$

константы $C > 0$ (константа Крамера–Лундберга), m и D^2 выражаются некоторой сложной формулой, включающей модифицированное распределение сл.в. T_i, Y_i, $i = 1, 2, \dots$, построенное с использованием показателя Лундберга $\varkappa$. Наконец,

$$\Phi_{(mu, D^2u)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D^2 u}}\exp\left((t - mu)^2/(2D^2u)\right)$$

является функцией нормального распределения с параметрами mu и D^2u.

[2]См., например, Embrechts P., Veraverbeke N. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. Insurance: Mathematics and Economics, **1** (1982), 55–72.

Заметим, что математическая задача («задача о разорении»), решением которой является формула (1), весьма непроста, что можно почувствовать из непростой формулировки ответа. Специалистам известно[3], что при глубоком анализе формулы (1) могут потребоваться определенные ее уточнения[4] или даже поиск ответа в других терминах[5], ориентированных на вычислительные процедуры. Однако для наших целей она вполне подходит.

Проанализируем формулу (1). Заметим сперва, что множитель $\Phi_{(mu,D^2u)}(t)$ является неубывающей функцией при растущем t, ограниченной сверху единицей (кстати, поэтому вероятность того, что разорение произойдет в неограниченном временном интервале, будет равна $\psi(u) = \psi(+\infty, u) \approx Ce^{-\varkappa u}$). Заметим также, что при положительном показателе $\varkappa$ множитель $e^{-\varkappa u}$ достаточно быстро убывает при росте начального капитала u. Именно этот множитель «делает вероятность разорения малой», если размер начального капитала увеличивается (при выполнении всех ранее перечисленных условий !).

Показатель $\varkappa > 0$ экспоненты $e^{-\varkappa u}$ также влияет на ее значения. Например, если $u = 20$ и $\varkappa = 0,321184$, то $e^{-\varkappa u} = 0,0016226$. Если $u = 20$ и $\varkappa = 0,285714$, то $e^{-\varkappa u} = 0,0032985$. Различия быстро растут при росте u. Так, если $u = 30$ и $\varkappa = 0,321184$, то $e^{-\varkappa u} = 0,0000654$. Если $u = 30$ и $\varkappa = 0,285714$, то $e^{-\varkappa u} = 0,0001895$.

В нашем случае показатель $\varkappa$ является решением уравнения (2), которое объединяет в себе тарифную политику (через интенсивность c премиальных выплат) и принятые на себя компанией риски (через распределения размеров страховых выплат Y_i и временных интервалов T_i).

Приведем пример[6], показывающий, что именно распределения, а не, скажем, их средние и дисперсии, следует привлекать для квалифицированного анализа вероятности разорения. Предположим, что распределение Y_i — экспоненциальное с параметром $\lambda > 0$,

$$p_Y(y) = \lambda \exp(-\lambda y)\,, \quad y \geqslant 0,$$

так что $\mathbf{E}Y_1 = \lambda^{-1}$, и рассмотрим два варианта распределений T_i, задавая их плотностями: распределение Парето

$$p_T(t) = \frac{ab}{\bigl(tb+1\bigr)^{a+1}}, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

и распределение Куммера

$$p_T(t) = \frac{k_1}{2}\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})}\mathbf{U}(1+\frac{k_2}{2}, 2-\frac{k_1}{2}, \frac{k_1}{k_2}t), \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Эти распределения приводят к процессу появления страховых случаев, известному как процесс Кокса и, в отличие от более простого пуассоновского процесса, отражают наличие различных «априорных» состояний страховой среды.

Для примера, положим $\lambda = 1$ и выберем в (3) параметры $a = 3$, $b = 2/5$ и в (4) — параметры $k_1 = 4$, $k_2 = 10$. Заметим, что такой выбор обеспечит

---

[3]См., например, Asmussen S. Approximations for the probability of ruin within finite time. *Scand. Actuar. J.*, **1984**, 31–57; **1985**, 64.

[4]См., например, Malinovskii V.K. Corrected normal approximation for the probability of ruin within finite time. *Scand. Actuarial J.*, **1994**, 161–174.

[5]См., например, Seal H.L. (1978). *Survival probabilities. The goal of risk theory*, Wiley, Chichester etc.

равенство средних (они будут равны 5/4) и дисперсий (они будут равны 75/16) распределений (3) и (4). Основное условие $\mathbf{E}Y_1 < c\mathbf{E}T_1$ преобразуется в следующее ограничение на c: $c > 4/5$. Решения уравнения (2) для этих двух случаев, приведенные ниже в виде таблиц, демонстрируют заметные различия в значениях показателя Лундберга.

$\boxed{c}$	$\boxed{\varkappa}$	$\boxed{c}$	$\boxed{\varkappa}$
0.9	0.066219	1.5	0.357322
1.0	0.128942	1.6	0.389903
1.1	0.185468	1.7	0.419400
1.2	0.235921	1.8	0.446216
1.3	0.280929	1.9	0.470690
1.4	0.321184	2.0	0.493110

Таблица 1. Распределение Парето величин T_i и экспоненциальное распределение величин Y_i.

$\boxed{c}$	$\boxed{\varkappa}$	$\boxed{c}$	$\boxed{\varkappa}$
0.9	0.060797	1.5	0.318098
1.0	0.116172	1.6	0.347514
1.1	0.165771	1.7	0.374349
1.2	0.210130	1.8	0.398929
1.3	0.249905	1.9	0.421529
1.4	0.285714	2.0	0.442381

Таблица 2. Распределение Куммера величин T_i и экспоненциальное распределение величин Y_i.

В заключение приведем графики зависимости вероятностей разорения $\psi(t, u)$ от t в описанных выше двух моделях, при $u = 20$ и $u = 30$. Точками изображается «точное» значение этих вероятностей, найденное процедурой имитационного моделирования. Сплошные линии изображают приближения к «точным» значениям, вычисленные на основе определенного уточнения[7] обсуждавшейся выше аппроксимации Крамера–Лундберга. Приведенные графики наглядно иллюстрируют, что кажущееся незначительным отличие может приводить к заметным расхождениям в величине соответствующих вероятностей разорения (на наших графиках — соответственно в два и три раза), причем тем большим, чем больше u.

[7] Malinovskii V.K. Corrected normal approximation for the probability of ruin within finite time. *Scand. Actuarial J.*, **1994**, 161–174.

Рекомендации страховщику в рамках «классической» модели теории риска:

1 Вопрос: Как влияет на вероятность разорения величина страховых выплат, интенсивность страховых случаев и размер страховых премий?

Ответ: Влияют одновременно, причем в зависимости от знака величины $\mathbf{E}Y_1 - c\mathbf{E}T_1$ наблюдается качественно различное поведение вероятности разорения, каков бы ни был размер начального капитала компании.

2 Вопрос: Как влияет на вероятность разорения величина начального капитала?

Ответ: Если $\mathbf{E}Y_1 - c\mathbf{E}T_1 > 0$, то начальный капитал будет достаточно быстро растрачен и разорение неминуемо. Если $\mathbf{E}Y_1 - c\mathbf{E}T_1 < 0$, то *при использовании перестрахования* рост начального капитала приводит к экспоненциальному убыванию вероятности разорения; *при отсутствии перестрахования*, понимаемой как возможность появления с большой вероятностью (отдельный вопрос — в каком смысле и насколько большой) как угодно больших страховых выплат, вероятность разорения определяется вероятностью того, что максимальная страховая выплата превзойдет размер начального капитала.

3 Вопрос: Пусть $\mathbf{E}Y_1 - c\mathbf{E}T_1 < 0$. Сильна ли зависимость вероятности разорения от более детальной информации о страховых выплатах и о частоте их возникновения, или на «детали» можно не обращать внимания?

Ответ: Если $\mathbf{E}Y_1 - c\mathbf{E}T_1 < 0$ и Вы пользуетесь перестрахованием, то малость вероятности разорения при большом начальном капитале Вам обеспечена. Если же Вы хотите знать, в каких пределах находится численное значение этой вероятности, то более подробная информация необходима.

Рекомендации актуариям (точнее, той их части, которая называется risk analysts), конечно, должны быть более углубленными. Главным вопросом является *как*, с привлечением каких математических моделей и какими методами, рассчитать численное значение вероятности разорения. Этому вопросу посвящен неиссякающий поток специальных исследований.